CUADERNO DE ESTUDIO INTENSIVO

Curso de Emergencia

Cinemática y Dinámica

Teoría breve, procedimientos y ejercicios de examen resueltos

Versión 1.0 · 2026 · CC BY-NC-SA 4.0

Índice

Presentación y cómo usar este cuaderno 3

Unidad 0 · Antes de empezar: qué viene en el examen 5

Unidad 1 · Cinemática de la partícula: rectilíneo, tiro parabólico y componentes normal y tangencial 9

Unidad 2 · Cinética de la partícula: segunda ley con fricción, cuerpos conectados y movimiento curvilíneo 22

Unidad 3 · Trabajo y energía, impulso y cantidad de movimiento de la partícula 36

Unidad 4 · Cinemática del cuerpo rígido: rotación, rodadura y mecanismos 51

Unidad 5 · Cinética del cuerpo rígido: traslación, rotación y movimiento plano general 66

Apéndice A · Formulario 83

Apéndice B · Exámenes completos 87

Apéndice C · Fe de erratas 92

Apéndice D · Fuentes 95

Apéndice E · Resoluciones de los ejercicios propuestos 97

Presentación y cómo usar este cuaderno

Este cuaderno está pensado para quien tiene que aprobar **Cinemática y Dinámica** en poco tiempo: en un examen extraordinario, en un final o después de varias semanas sin estudiar la materia.

Sigue el orden de los temas del programa de la asignatura:

1. Cinemática de la partícula.
2. Cinética de la partícula.
3. Trabajo y energía e impulso y cantidad de movimiento de la partícula.
4. Cinemática del cuerpo rígido.
5. Cinética del cuerpo rígido.

Cada unidad se enseña igual que en clase: objetivo, conceptos, ejemplo resuelto y ejercicios. La diferencia es que todo está recortado a lo que se pregunta en los exámenes.

Objetivo de la asignatura (programa). El alumno será capaz de comprender los diferentes estados mecánicos de movimiento de partículas y de cuerpos rígidos considerando la geometría del movimiento, así como las causas que lo modifican. Asimismo será capaz de analizar y resolver ejercicios de cinemática y dinámica clásicas.

De dónde salen los ejercicios.

- Se revisaron los **53 exámenes finales y extraordinarios publicados de 2007-2 a 2018-2**: 27 aplicaciones distintas, varias con versiones A, B, C y D o de turno matutino y vespertino. Todos tienen resolución publicada.
- Los ejercicios del cuaderno se tomaron sobre todo de los exámenes de 2009-2 en adelante, que ya tienen el formato actual de cuatro problemas.
- Cada ejercicio indica el examen del que se adaptó. Los enunciados están redactados de nuevo, con los mismos datos y las unidades originales (Sistema Internacional o sistema inglés), y las figuras están redibujadas.
- Las resoluciones son propias y se verificaron numéricamente. Cuando el valor obtenido no coincide con el de una resolución publicada, la diferencia se anota en el Apéndice C (Fe de erratas).

Requisito. Cinemática y Dinámica se cursa después de Estática. Lo que se usa de esa materia (diagrama de cuerpo libre, fricción, centro de masa y momento de una fuerza) está resumido en la sección 0.7.

Cómo usar este cuaderno

Cada unidad tiene la misma estructura:

1. Un recuadro de **Instrucciones de emergencia**: cuánto sale en el examen, cuánto tiempo dedicarle y la ruta corta.
2. **Conceptos y expresiones**, en tono de libro.
3. **Cómo reconocer el problema**: una tabla que lleva del enunciado al procedimiento.
4. **Procedimientos**, paso a paso.
5. **Ejemplo resuelto**.
6. **Ejercicios de examen resueltos**.

7. **Ejercicios propuestos**, con el resultado. Las resoluciones completas están en el Apéndice E.
8. **Errores frecuentes**, **formulario de la unidad** y **procedimiento recomendado en el examen**.

Formato de cada resolución. Datos (con unidades) ⟶ Planteamiento (sistema de referencia, diagrama de cuerpo libre y ecuación general) ⟶ Resolución ⟶ **Resultado**. Conviene escribir igual en el examen: las instrucciones de los exámenes recientes advierten que se califica la claridad del desarrollo y no solo el resultado.

Rutas de estudio. La Unidad 0 propone una ruta de 5 semanas y otra de 2 semanas, ordenadas por lo que más puntos da.

Regla de emergencia. Nunca dos días seguidos sin estudiar. Un día mínimo (30 minutos y un ejercicio) cuenta como día cumplido.

Licencia

© 2026 luigisrs.me. Esta obra está bajo una licencia **Creative Commons Atribución-NoComercial-CompartirIgual 4.0 Internacional (CC BY-NC-SA 4.0)**: `https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/deed.es`

Puedes copiarla, distribuirla y adaptarla con fines no comerciales, siempre que cites al autor (luigisrs.me) y compartas las adaptaciones con la misma licencia.

Los enunciados de los exámenes se citan como fuente y pertenecen a sus autores. Las referencias completas están en el Apéndice D.

Unidad 0 · Antes de empezar: qué viene en el examen

Instrucciones de emergencia

- **Tiempo:** 30 minutos. Léela completa antes de cualquier otra unidad.
- **Para qué:** decidir dónde invertir el tiempo. No todos los temas valen lo mismo.
- **Si Estática quedó lejos:** repasa la sección 0.7 antes de la Unidad 2.

0.1 Cómo es el examen

Según los 53 exámenes publicados de 2007-2 a 2018-2:

- **Problemas:** 4 desde 2009-2 (antes eran 3). Cada problema suele tener dos o tres incisos.
- **Duración:** 2 horas desde 2013-1 (hasta 2012-2 eran dos horas y media).
- **Versiones:** el mismo día se aplican dos a cuatro versiones (A, B, C, D o turno matutino y vespertino) con la misma estructura y otros datos. Por eso, en este cuaderno, las versiones de un mismo examen cuentan como **un solo examen**: son 27 exámenes distintos.
- **Unidades:** la mayoría de los problemas están en el Sistema Internacional, pero algunos vienen en el sistema inglés (lb, ft, in, slug). Se resuelven en las unidades del enunciado; las conversiones están en el Apéndice A.
- **Calificación:** las instrucciones recientes dicen que se califica la claridad y la limpieza del desarrollo, no solo el resultado. El diagrama de cuerpo libre y la ecuación general escrita antes de sustituir valen puntos aunque el número final salga mal.

0.2 Qué tan seguido sale cada tema

Frecuencia en los 27 exámenes de 2007-2 a 2018-2 (las versiones del mismo examen cuentan como uno). La columna «Problemas» cuenta todas las versiones (200 problemas en total). Un problema que se resuelve con dos métodos, por ejemplo energía para la rapidez y segunda ley para la fuerza normal, cuenta en las dos unidades para la columna de exámenes.

Unidad	Tema	Exámenes (27)	Problemas	Desde 2014 (8)
1	Cinemática de la partícula	20	40	7
2	Cinética de la partícula	19	34	5
3	Trabajo y energía, impulso y cantidad de movimiento	**26**	52	7
4	Cinemática del cuerpo rígido	18	28	**8**
5	Cinética del cuerpo rígido	**25**	46	**8**

Observaciones:

- **Unidades 3 y 5** salen en casi todos los exámenes: son el núcleo de la materia.
- La **Unidad 4** no aparecía en los exámenes de 3 problemas (2007-2 a 2009-1), pero desde 2009-2 sale en 18 de 20 exámenes y en todos desde 2014. Hoy es tan obligatoria como la 5.

- La **Unidad 2** aparece muchas veces combinada con la 3: la rapidez se obtiene con energía y la fuerza normal o la tensión con la segunda ley en componentes normal y tangencial.
- **Los problemas se reciclan:** polea doble con cuerpos colgantes, cilindro que rueda con un cuerpo colgado, collarín con resorte, mecanismo de cuatro articulaciones, impulso con una gráfica fuerza-tiempo. Resolver exámenes anteriores es la mejor preparación.

0.3 Orden típico de los problemas

En los exámenes de 4 problemas (41 versiones, de 2009-2 a 2018-2) el orden casi siempre es:

Problema	Tema típico	Versiones
1	Cinemática de la partícula: tiro parabólico, rectilíneo, componentes normal y tangencial (Unidad 1)	28 de 41
2	Cinética de la partícula o trabajo y energía (Unidades 2 y 3)	34 de 41
3	Mecanismo o rotación (Unidad 4), o bien energía o impulso (Unidad 3)	22 y 19 de 41
4	Cinética del cuerpo rígido (Unidad 5)	35 de 41

0.4 Orden de estudio por puntos

El libro sigue el orden del programa, pero no hace falta estudiarlo en ese orden. Por importancia, las unidades 3 y 5 van primero; en la práctica conviene esta ruta, porque cada unidad usa la anterior:

1. **Unidad 1** (un día): el problema 1 casi siempre sale de aquí y es el más mecánico.
2. **Unidad 2** junto con la **Unidad 3**: segunda ley y energía se combinan en el mismo problema.
3. **Unidad 4**, por lo menos rodadura ($v_G = \omega r$, $a_G = \alpha r$), centro instantáneo de rotación y cuatro articulaciones.
4. **Unidad 5**: el problema 4 de casi todos los exámenes.

Ruta de 5 semanas (unas 10 horas por semana). Cada día, uno o dos bloques de 90 minutos y 15 minutos de cierre para anotar los errores del día. Cada sábado, un examen completo de 2 horas, cronometrado y sin consultar.

Semana	Unidades
1	Unidad 0, sección 0.7 (Estática) y Unidad 1
2	Unidad 2 y Unidad 3, trabajo y energía
3	Unidad 3, impulso y choques, y Unidad 4
4	Unidad 5 y repaso de errores
5	Exámenes completos del Apéndice B y el Apéndice A de memoria

Ruta de 2 semanas.

- Semana 1: Unidad 1 (solo tiro parabólico y componentes normal y tangencial), Unidad 3 completa y la parte de la Unidad 2 que se combina con ella.
- Semana 2: Unidad 4 (rodadura, CIR, cuatro articulaciones) y Unidad 5; un examen completo cada tercer día.
- Todos los días: el formulario del Apéndice A, escrito de memoria.

0.5 Qué recortar y qué no

Si el tiempo no alcanza, se recorta en este orden:

1. El movimiento relativo de dos partículas (salió una vez).
2. El collarín que desliza sobre una barra que gira (Unidad 4).
3. La energía del cuerpo rígido (Unidad 5): pocos problemas la piden.
4. Los choques (Unidad 3): dos problemas desde 2014.

No conviene recortar:

- el trabajo y la energía con resortes y fricción;
- la segunda ley en componentes normal y tangencial;
- el cuerpo que rueda sin deslizar con un cuerpo colgado y la polea doble;
- el mecanismo de cuatro articulaciones o de manivela-biela-corredera;
- el tiro parabólico.

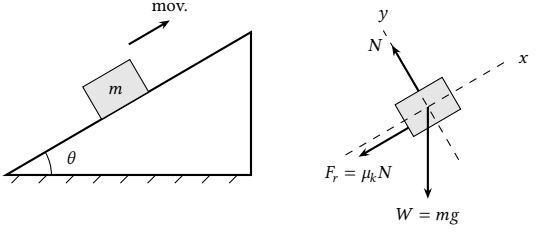
0.6 En el examen (120 minutos)

1. Lee los cuatro problemas (5 min) y empieza por el que reconozcas mejor; casi siempre el 1 o el 4.
2. Reparte unos 25 minutos por problema y deja 10 al final para revisar.
3. En cada problema: datos con unidades, sistema de referencia, **diagrama de cuerpo libre** y ecuación general **antes** de sustituir.
4. Cada inciso se califica por separado. Si un inciso no sale, deja planteada la ecuación y sigue con el siguiente usando un valor supuesto, y dilo por escrito.
5. Al final revisa signos (sentido de giro, sentido de la fricción) y unidades (newtons contra kilogramos, libras contra slugs).

0.7 Lo que se usa de Estática

Cinemática y Dinámica tiene a Estática como antecedente. Estas son las cuatro herramientas que se usan en casi todos los problemas.

Diagrama de cuerpo libre (DCL). Se aísla el cuerpo y se dibujan *todas* las fuerzas externas: el peso $W = mg$ en el centro de masa, las reacciones en cada apoyo o superficie de contacto (normal perpendicular a la superficie), las tensiones a lo largo de cada cuerda y la fricción tangente a la superficie. En dinámica se dibuja además, aparte, el vector $m\vec{a}$ (y $\bar{I}\alpha$ en un cuerpo rígido): las ecuaciones igualan las fuerzas del DCL con ese «diagrama cinético».



Fricción de Coulomb. En una superficie con coeficientes μ_s (estático) y μ_k (cinético):

- Si el cuerpo **no desliza**, la fricción es la que haga falta para el equilibrio (o para la aceleración común) y solo se sabe que $F_r \le \mu_s N$.
- Si el cuerpo **desliza**, $F_r = \mu_k N$, con sentido opuesto a la velocidad relativa.
- Procedimiento: suponer que no desliza, calcular la fricción necesaria y compararla con $\mu_s N$. Si $F_r > \mu_s N$, desliza y se rehace con $\mu_k N$.
- La normal **no** siempre vale mg: en un plano inclinado es $mg\cos\theta$ si no hay otras fuerzas perpendiculares, y cambia si una cuerda o una fuerza tiene componente perpendicular al plano.

Centro de masa. En un cuerpo homogéneo y simétrico está en el centro geométrico. Para un cuerpo compuesto, $\bar{x} = \sum m_i \bar{x}_i / \sum m_i$. El peso actúa en el centro de masa, y en la Unidad 5 las ecuaciones $\sum \vec{F} = m\vec{\bar{a}}$ y $\sum M_G = \bar{I}\alpha$ se escriben respecto a él.

Momento de una fuerza. Respecto a un punto O, $M_O = F\,d$, con d la distancia perpendicular de O a la línea de acción; positivo si hace girar en sentido antihorario. En forma vectorial, $\vec{M}_O = \vec{r} \times \vec{F}$ y, en el plano,

$$M_O = xF_y - yF_x.$$

Conviene tomar momentos respecto al punto donde concurren más incógnitas: un pasador, el punto de contacto o el punto donde se cruzan dos reacciones.

Peso y masa. En el Sistema Internacional, W en newtons y $m = W/g$ en kilogramos con $g = 9.81\,\mathrm{m/s^2}$ (algunos exámenes usan 9.8 o 9.78). En el sistema inglés, W en libras y $m = W/g$ en slugs con $g = 32.2\,\mathrm{ft/s^2}$. Un enunciado que dice «pesa 30 N» da un peso, no una masa.

0.8 Formulario de emergencia

El formulario completo de todas las unidades, con la tabla de momentos de inercia y las conversiones, está en el **Apéndice A**. Conviene escribirlo de memoria, desde cero, unos minutos cada día. El Apéndice B dice qué problemas vinieron en cada examen y propone tres exámenes completos como simulacro.

Unidad 1 · Cinemática de la partícula: rectilíneo, tiro parabólico y componentes normal y tangencial

Objetivo (programa de la asignatura). El alumno analizará y resolverá ejercicios de la cinemática de la partícula.

Instrucciones de emergencia

- **Frecuencia:** aparece en 20 de los 27 exámenes de 2007-2 a 2018-2 (las versiones de un mismo examen cuentan como uno), con 40 problemas si se cuentan todas las versiones, y en 7 de los 8 exámenes desde 2014. Casi siempre es el problema 1 (en 28 de los 41 exámenes de cuatro problemas).
- **Tiempo:** de 3 a 4 horas para esta unidad.
- **Ruta corta:**
  1. Lee la sección 1.1 y la tabla de la sección 1.2 (25 min).
  2. Sigue el ejemplo 1.4 tapando la resolución.
  3. Resuelve los ejercicios 1.5 con cronómetro (15 min cada uno).

1.1 Conceptos y expresiones

Posición, velocidad y aceleración. La posición de una partícula se describe con un vector $\vec{r}(t)$ medido desde un origen fijo. La velocidad y la aceleración son sus derivadas:

$$\vec{v} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}, \qquad \vec{a} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}.$$

La **rapidez** es la magnitud $v = |\vec{v}|$; el **desplazamiento** es $\Delta\vec{r}$ y la **distancia recorrida** es la longitud del camino, que solo coincide con $|\Delta\vec{r}|$ si la partícula no regresa.

Movimiento rectilíneo. Con una sola coordenada x (o s) se cumple

$$v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}, \qquad a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = v\,\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}.$$

- **Uniforme** ($a = 0$): $x = x_0 + vt$.
- **Uniformemente acelerado** (a constante):

$$v = v_0 + at, \quad x = x_0 + v_0 t + \tfrac{1}{2}at^2, \quad v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0).$$

- **Aceleración variable:** se separan variables y se integra (tabla de la sección 1.3.2). Las fórmulas anteriores **no** valen.

Gráficas. La pendiente de la gráfica x-t es v; la pendiente de la v-t es a. El área bajo la a-t es Δv y el área bajo la v-t es Δx (con signo). La distancia recorrida es el área de $|v|$.

Tiro parabólico. Sin resistencia del aire, con x horizontal e y vertical hacia arriba:

$$\begin{aligned} a_x &= 0, & v_x &= v_0\cos\theta_0, & x &= x_0 + v_0\cos\theta_0\, t,\\ a_y &= -g, & v_y &= v_0\sin\theta_0 - gt, & y &= y_0 + v_0\sin\theta_0\, t - \tfrac{1}{2}gt^2. \end{aligned}$$

Si se elimina t (lanzamiento desde el origen), la trayectoria es la parábola

$$y = x\tan\theta_0 - \frac{g\,x^2}{2v_0^2\cos^2\theta_0}.$$

En terreno horizontal, el alcance es $R = \dfrac{v_0^2\sin 2\theta_0}{g}$ y los ángulos θ_0 y $90^\circ - \theta_0$ dan el mismo alcance.

Componentes normal y tangencial. Para una trayectoria curva plana, $\hat{e}_t$ es tangente en el sentido del movimiento y $\hat{e}_n$ apunta hacia el centro de curvatura:

$$\vec{v} = v\,\hat{e}_t, \qquad \vec{a} = a_t\,\hat{e}_t + a_n\,\hat{e}_n,$$

$$a_t = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s}, \qquad a_n = \frac{v^2}{\rho}, \qquad a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2}.$$

ρ es el radio de curvatura: en una circunferencia, $\rho = r$; para una curva $y(x)$,

$$\rho = \frac{\left[1 + (\mathrm{d}y/\mathrm{d}x)^2\right]^{3/2}}{|\mathrm{d}^2y/\mathrm{d}x^2|}.$$

En el tiro parabólico la única aceleración es g; si θ es el ángulo de la velocidad con la horizontal, $a_t = \mp g\sin\theta$ (frena al subir, acelera al bajar) y $a_n = g\cos\theta$. En la cima, $\rho = v_x^2/g$.

Movimiento dependiente. Si varios cuerpos están unidos por una cuerda inextensible, la longitud de la cuerda escrita con las posiciones de los cuerpos es constante: $\sum c_i\,y_i = L$. Al derivar, $\sum c_i\,v_i = 0$ y $\sum c_i\,a_i = 0$.

Movimiento relativo de dos partículas. Con ejes que se trasladan con B:

$$\vec{r}_{A/B} = \vec{r}_A - \vec{r}_B, \qquad \vec{v}_{A/B} = \vec{v}_A - \vec{v}_B, \qquad \vec{a}_{A/B} = \vec{a}_A - \vec{a}_B.$$

Este tema (4.3 del programa) solo aparece así, con dos automóviles; la Unidad 4 lo retoma para puntos de un cuerpo rígido.

1.2 Cómo reconocer el problema

Si el enunciado dice…	Se trata de…	Ver
«frena uniformemente», «acelera a razón constante», «necesita 100 m para detenerse»	Aceleración constante	1.3.1
$a = kt^2$, $a = -kv^2$, $a = f(s)$	Aceleración variable	1.3.2
Una gráfica *a*-*t* o *v*-*t*; «construya las curvas»	Gráficas	1.3.3
«pasa junto a una patrulla», «alcanza», «ventaja para empatar»	Persecución y encuentro	1.3.4
«se lanza horizontalmente», «a 40°», «cae sobre la pendiente», «perfil del terreno»	Tiro parabólico	1.3.5
«pista circular», «radio de curvatura», «aceleración total», $s(t)$ sobre una curva	Componentes normal y tangencial	1.3.6
Cuerpos colgados de poleas con velocidades dadas	Movimiento dependiente	1.3.7
«velocidad de *A* con respecto a *B*»	Movimiento relativo	1.3.8

1.3 Procedimientos

1.3.1 Movimiento rectilíneo con aceleración constante

1. Elige origen y sentido positivo; convierte las unidades (1 km/h = 0.2778 m/s; 60 mi/h = 88 ft/s).
2. Escribe los tres datos que conoces de entre v_0, v, a, t, Δx.
3. Usa la ecuación que no contiene la incógnita que no te piden: sin t, $v^2 = v_0^2 + 2a\Delta x$; sin Δx, $v = v_0 + at$.
4. Revisa el signo: si frena, a tiene signo contrario a v.

1.3.2 Aceleración variable: $a(t)$, $a(v)$, $a(s)$

1. Identifica de qué variable depende a y separa variables:

Dato	Integral
$a(t)$	$v - v_0 = \int_0^t a\,\mathrm{d}t$; luego $x - x_0 = \int_0^t v\,\mathrm{d}t$
$a(v)$	$t = \int_{v_0}^{v} \frac{\mathrm{d}v}{a(v)}$, o bien $x - x_0 = \int_{v_0}^{v} \frac{v\,\mathrm{d}v}{a(v)}$
$a(s)$	$\frac{1}{2}(v^2 - v_0^2) = \int_{s_0}^{s} a\,\mathrm{d}s$

2. Si la constante de a es desconocida (por ejemplo, $a = kt^2$), integra con constantes C y usa todas las condiciones dadas para hallar k y las C.
3. Evalúa en el instante pedido.

1.3.3 Gráficas a-t, v-t, x-t

1. Por tramos: escribe $a(t)$ o $v(t)$ de cada tramo (recta: $y = y_0 + m(t - t_0)$).
2. Integra tramo por tramo usando como condición inicial el valor final del tramo anterior; o suma áreas.
3. Para la distancia recorrida busca dónde $v = 0$ y suma $|\Delta x|$ de cada intervalo.
4. La aceleración máxima es la mayor pendiente de la v-t.

1.3.4 Persecución y encuentro

1. Usa un solo reloj ($t = 0$ en un evento claro) y un solo origen.
2. Escribe $x(t)$ de cada móvil por tramos, con su hora de arranque: un móvil que arranca en t_0 tiene $x = \frac{1}{2}a(t - t_0)^2$.
3. Iguala posiciones, $x_A(t) = x_B(t)$, en el tramo correcto; si sale un tiempo fuera del tramo, cambia de tramo.
4. Contesta lo que piden: tiempo desde el arranque de quien persigue o desde el $t = 0$ común.

1.3.5 Tiro parabólico

1. Ejes: origen en el lanzamiento, x horizontal, y hacia arriba. Descompón v_0.
2. Escribe $x(t)$ y $y(t)$.
3. Condición de llegada: suelo $y = -h$; pared $x = d$; pendiente recta de ángulo β que baja desde el punto de lanzamiento: $y = -x \tan\beta$ (más el desnivel si lo hay); terreno curvo: $y_{\text{tray}}(x) = y_{\text{terreno}}(x)$.
4. Resuelve para t (o para x) y obtén lo demás.
5. Si piden ρ o a_t en un punto, sigue con 1.3.6.

1.3.6 Componentes normal y tangencial; radio de curvatura

1. Obtén v en el punto (de $s(t)$, de las fórmulas de rapidez o del tiro).
2. a_t: con $\dot{v}$ si conoces $v(t)$; con $v\,\mathrm{d}v/\mathrm{d}s$ si conoces el cambio de rapidez en una distancia; en tiro, $a_t = -g\sin\theta$, con θ el ángulo de la velocidad sobre la horizontal (positivo al subir, negativo al bajar): la rapidez disminuye al subir y aumenta al bajar.
3. $a_n = v^2/\rho$; en tiro, $a_n = g\cos\theta$ y entonces $\rho = v^2/(g\cos\theta)$.
4. Magnitud $a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2}$; dirección con $\tan\phi = a_n/a_t$ medida desde $\hat{e}_t$, y luego respecto a la horizontal.

1.3.7 Movimiento dependiente con poleas

1. Mide la posición de cada cuerpo (o polea móvil) desde una referencia fija, con el mismo sentido positivo para todos.
2. Escribe la longitud de cada cuerda: cada tramo que llega a una polea móvil cuenta una vez; una polea móvil sostenida por dos tramos aparece con coeficiente 2.
3. Deriva: $\sum c_i v_i = 0$, $\sum c_i a_i = 0$, y sustituye con signo.

1.3.8 Movimiento relativo de dos partículas

1. Escribe $\vec{v}_A, \vec{v}_B, \vec{a}_A, \vec{a}_B$ en componentes $\hat{\imath}, \hat{\jmath}$. Si un móvil va en curva con rapidez constante, su aceleración es $a_n = v^2/\rho$ hacia el centro.
2. Resta: $\vec{v}_{A/B} = \vec{v}_A - \vec{v}_B$, $\vec{a}_{A/B} = \vec{a}_A - \vec{a}_B$.
3. Da magnitud y ángulo respecto a la horizontal.

1.4 Ejemplo resuelto

Ejemplo resuelto · Corredor en pista circular

Adaptado del 1er final 2018-1, turno matutino, problema 1.
En una pista circular de 150 m de radio, un corredor aumenta uniformemente su rapidez de 4 m/s a 8 m/s en una distancia de 100 m. Determine: a) el tiempo que emplea en recorrer los 100 m; b) la magnitud de su aceleración en el instante final.
Datos. $\rho = 150$ m; $v_0 = 4$ m/s; $v = 8$ m/s; $\Delta s = 100$ m; a_t constante.
Planteamiento. Componentes normal y tangencial: la rapidez cambia uniformemente, así que a_t es constante y la trayectoria es circular, así que $a_n = v^2/\rho$.
Resolución. a) Con $a_t = v\,\mathrm{d}v/\mathrm{d}s$ constante se integra $v^2 = v_0^2 + 2a_t\Delta s$:

$$a_t = \frac{v^2 - v_0^2}{2\Delta s} = \frac{8^2 - 4^2}{2(100)} = 0.24\ \mathrm{m/s^2}.$$

De $v = v_0 + a_t t$:

$$t = \frac{8 - 4}{0.24} = 16.67\ \mathrm{s}.$$

b) En el instante final:

$$a_n = \frac{v^2}{\rho} = \frac{8^2}{150} = 0.427\ \mathrm{m/s^2}, \qquad a = \sqrt{0.24^2 + 0.427^2} = 0.490\ \mathrm{m/s^2}.$$

El vector $\vec{a}$ forma $\tan^{-1}(0.427/0.24) = 60.6^\circ$ con la dirección del movimiento, hacia el centro.
Resultado. a) $t = 16.7$ s; b) $a = 0.490\,\text{m/s}^2$.

1.5 Ejercicios de examen resueltos

Ejercicio 1.5.1 · Patrulla que alcanza a un auto

Adaptado de: 1er final 2014-2, versión B, problema 1

Un auto pasa junto a una patrulla estacionada con una velocidad constante de 70 mi/h. Tres segundos después, la patrulla arranca desde el reposo y acelera a razón de $10\,\text{ft/s}^2$ hasta alcanzar 85 mi/h, que mantiene. Ningún vehículo cambia después su velocidad. Determine: a) el tiempo que tarda la patrulla en alcanzar al auto; b) la distancia que recorre la patrulla para alcanzarlo.

Datos. $v_A = 70\,\text{mi/h} = 102.67\,\text{ft/s}$; $v_P = 85\,\text{mi/h} = 124.67\,\text{ft/s}$; $a_P = 10\,\text{ft/s}^2$; retraso de 3 s.

Planteamiento. Persecución. Reloj común: $t = 0$ cuando el auto pasa junto a la patrulla; origen en la patrulla.

Resolución. Auto: $x_A = 102.67\,t$. La patrulla acelera durante $(124.67 - 0)/10 = 12.47$ s, es decir, de $t = 3$ a $t = 15.47$ s, y recorre $\frac{1}{2}(10)(12.47)^2 = 777.1$ ft. En $t = 15.47$ el auto va en $x_A = 1588$ ft: todavía no la alcanza, así que el encuentro ocurre en el tramo uniforme:

$$x_P = 777.1 + 124.67\,(t - 15.47).$$

Igualando $x_A = x_P$:

$$102.67\,t = 777.1 + 124.67\,t - 1928.2 \;\Rightarrow\; 22\,t = 1151.1 \;\Rightarrow\; t = 52.32\,\text{s}.$$

La patrulla lleva $52.32 - 3 = 49.32$ s en movimiento y recorre $x = 102.67(52.32) = 5372$ ft.

Resultado. a) 49.3 s desde que arranca la patrulla (52.3 s desde que pasa el auto); b) 5372 ft.

Ejercicio 1.5.2 · Aceleración en función de la velocidad

Adaptado de: 1er final 2011-2, versión B, problema 1

La aceleración de una partícula en movimiento rectilíneo es $a = -15v^2$ (en in/s^2, con v en in/s). Si $s_0 = 0$ y $v_0 = 36$ in/s cuando $t = 0$, determine la posición, la velocidad y la aceleración de la partícula cuando $t = 5$ s.

Datos. $a = -kv^2$ con $k = 15\,\text{in}^{-1}$; $s_0 = 0$; $v_0 = 36$ in/s; $t = 5$ s.

Planteamiento. Aceleración función de v: se separa $\mathrm{d}v/v^2 = -k\,\mathrm{d}t$ y luego se integra $v = \mathrm{d}s/\mathrm{d}t$.

Resolución.

$$\int_{v_0}^{v} \frac{\mathrm{d}v}{v^2} = -k\int_0^t \mathrm{d}t \;\Rightarrow\; \frac{1}{v} = \frac{1}{v_0} + kt \;\Rightarrow\; v = \frac{v_0}{1 + kv_0t} = \frac{36}{1 + 540\,t}.$$

$$s = \int_0^t \frac{36\,\mathrm{d}t}{1 + 540\,t} = \frac{1}{15}\ln(1 + 540\,t).$$

En $t = 5$ s: $1 + 540(5) = 2701$, así que

$$s = \frac{\ln 2701}{15} = 0.527 \text{ in}, \quad v = \frac{36}{2701} = 0.013\,33 \text{ in/s},$$

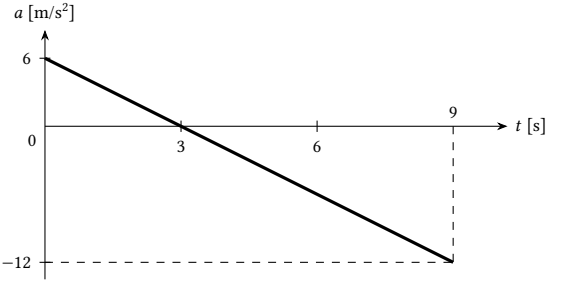
$$a = -15(0.01333)^2 = -2.66 \times 10^{-3} \text{ in/s}^2.$$

Resultado. $s = 0.527$ in, $v = 0.0133$ in/s, $a = -0.002\,66$ in/s^2.

Ejercicio 1.5.3 · Gráfica aceleración-tiempo

Adaptado de: 1er final 2018-2, turno vespertino, problema 1

Una partícula se mueve en línea recta con la aceleración de la gráfica: una recta que va de $a = 6$ m/s^2 en $t = 0$ a $a = -12$ m/s^2 en $t = 9$ s. En $t = 0$, $s = 3$ m y $v = 2$ m/s. Determine: a) su velocidad y su posición en $t = 9$ s; b) su desplazamiento y la distancia que recorre de $t = 0$ a $t = 9$ s.



Datos. $a(0) = 6$, $a(9) = -12$ m/s^2; $s_0 = 3$ m; $v_0 = 2$ m/s.

Planteamiento. Aceleración en función del tiempo dada por una gráfica: pendiente $(-12 - 6)/9 = -2$, así que $a = 6 - 2t$. Se integra dos veces.

Resolución.

$$v = 2 + 6t - t^2, \qquad s = 3 + 2t + 3t^2 - \tfrac{1}{3}t^3.$$

a) $v(9) = 2 + 54 - 81 = -25$ m/s; $s(9) = 3 + 18 + 243 - 243 = 21$ m.

b) Desplazamiento: $s(9) - s(0) = 21 - 3 = 18$ m. La partícula se detiene cuando $t^2 - 6t - 2 = 0$, $t = 3 + \sqrt{11} = 6.32$ s, donde $s = 51.32$ m. Distancia:

$$d = (51.32 - 3) + |21 - 51.32| = 48.32 + 30.32 = 78.64 \text{ m}.$$

Resultado. a) $v = -25$ m/s, $s = 21$ m; b) desplazamiento 18 m, distancia 78.6 m.

Ejercicio 1.5.4 · Bolsa lanzada a un camión

Adaptado de: 1er final 2015-1, versión A, problema 1

Desde una ventana a 35 ft de altura se lanza horizontalmente una bolsa con 5 ft/s, para que caiga en un camión. En el instante del lanzamiento el camión pasa justo debajo de la

ventana con 2 ft/s. ¿Qué aceleración uniforme debe tener el camión para recibir la bolsa? Use $g = 32.2\,\text{ft/s}^2$ y desprecie la altura de la caja del camión.

Datos. $h = 35\,\text{ft}$; $v_{0A} = 5\,\text{ft/s}$ (bolsa, horizontal); $v_{0B} = 2\,\text{ft/s}$ (camión); $g = 32.2\,\text{ft/s}^2$.

Planteamiento. Tiro horizontal para la bolsa y movimiento uniformemente acelerado para el camión, con el mismo reloj y el mismo origen bajo la ventana. Ambos deben estar en el mismo $x = R$ cuando la bolsa llega abajo.

Resolución. Caída: $0 = 35 - \frac{1}{2}(32.2)t^2 \Rightarrow t = 1.474\,\text{s}$. Alcance de la bolsa: $R = 5t = 7.372\,\text{ft}$. Camión:

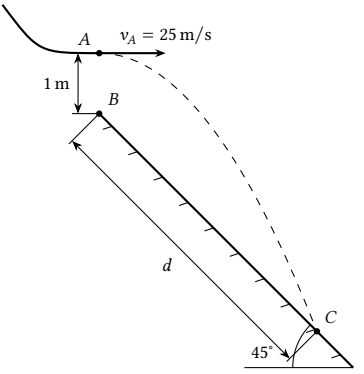
$$R = 2t + \tfrac{1}{2}at^2 \;\Rightarrow\; a = \frac{2(R-2t)}{t^2} = \frac{2(7.372 - 2.949)}{1.474^2} = 4.07\,\text{ft/s}^2.$$

Resultado. $a = 4.07\,\text{ft/s}^2$.

Ejercicio 1.5.5 · Esquiador sobre una pendiente

Adaptado de: 1er final 2014-2, versión B, problema 2

Un esquiador sale del extremo A de un trampolín en dirección horizontal con 25 m/s. La pendiente de aterrizaje es recta, de 45°, y empieza en el punto B, 1 m directamente debajo de A. Despreciando la resistencia del aire, determine para el instante en que aterriza en C: a) la distancia $d = BC$; b) el radio de curvatura de su trayectoria en C. Use $g = 9.81\,\text{m/s}^2$.



Datos. $v_A = 25\,\text{m/s}$ horizontal; desnivel $AB = 1\,\text{m}$; $\beta = 45°$; $g = 9.81\,\text{m/s}^2$.

Planteamiento. Tiro horizontal con origen en A: $x = 25t$, $y = -4.905t^2$. Un punto de la pendiente a distancia d de B tiene $x = d\cos 45°$, $y = -1 - d\sin 45°$, es decir, $y = -1 - x$.

Resolución. a) Llegada: $-4.905t^2 = -1 - 25t$, o $4.905t^2 - 25t - 1 = 0$; raíz positiva $t = 5.137\,\text{s}$. Entonces $x = 128.4\,\text{m}$ y

$$d = \frac{x}{\cos 45°} = 181.6\,\text{m}.$$

b) En C: $v_x = 25$ y $v_y = -9.81(5.137) = -50.39\,\text{m/s}$. Entonces $v = 56.25\,\text{m/s}$, con $\theta = \tan^{-1}(50.39/25) = 63.6^\circ$ bajo la horizontal.

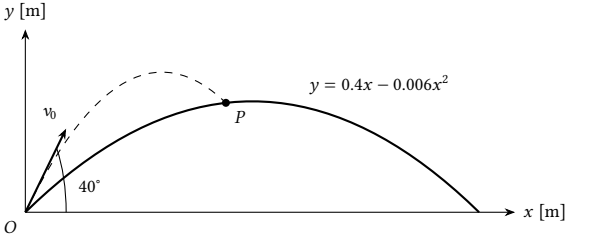
$$a_n = g\cos\theta = 9.81\cos 63.6^\circ = 4.36\,\text{m/s}^2, \qquad \rho = \frac{v^2}{a_n} = \frac{56.25^2}{4.36} = 725.7\,\text{m}.$$

Resultado. a) $d = 181.6\,\text{m}$; b) $\rho_C = 726\,\text{m}$.

Ejercicio 1.5.6 · Proyectil sobre terreno curvo

Adaptado de: 1er final 2013-1, versión B, problema 2

Un proyectil se lanza desde el origen con 20 m/s a 40° sobre la horizontal. El perfil del terreno se aproxima con $y = 0.4x - 0.006x^2$ (x, y en metros). Para el instante en que cae sobre el terreno, determine: a) el tiempo de vuelo; b) su velocidad; c) la componente tangencial de su aceleración; d) el radio de curvatura de su trayectoria. Use $g = 9.81\,\text{m/s}^2$.



Datos. $v_0 = 20\,\text{m/s}$; $\theta_0 = 40^\circ$; terreno $y = 0.4x - 0.006x^2$; $g = 9.81\,\text{m/s}^2$.

Planteamiento. Trayectoria $y = x\tan 40^\circ - \dfrac{9.81x^2}{2(20)^2\cos^2 40^\circ} = 0.8391x - 0.020896x^2$. Se iguala con el terreno; luego componentes normal y tangencial con g.

Resolución. a) $0.8391x - 0.020896x^2 = 0.4x - 0.006x^2 \Rightarrow x(0.4391 - 0.014896x) = 0$, así que $x = 29.48\,\text{m}$ (y $y = 6.58\,\text{m}$). Con $v_x = 20\cos 40^\circ = 15.32\,\text{m/s}$:

$$t = \frac{29.48}{15.32} = 1.924\,\text{s}.$$

b) $v_y = 20\sin 40^\circ - 9.81(1.924) = -6.02\,\text{m/s}$:

$$\vec{v} = (15.32\,\hat{\imath} - 6.02\,\hat{\jmath})\,\text{m/s}, \quad v = 16.46\,\text{m/s}, \quad \theta = 21.4^\circ \text{ bajo la horizontal.}$$

c) Al bajar, g tiene componente a favor del movimiento: $a_t = g\sin\theta = 9.81\sin 21.4^\circ = 3.59\,\text{m/s}^2$.

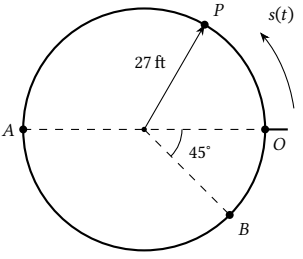
d) $a_n = g\cos\theta = 9.13\,\text{m/s}^2$ y $\rho = v^2/a_n = 16.46^2/9.13 = 29.7\,\text{m}$.

Resultado. a) $t = 1.92\,\text{s}$; b) $v = 16.5\,\text{m/s}$ a 21.4° bajo la horizontal; c) $a_t = 3.59\,\text{m/s}^2$; d) $\rho = 29.7\,\text{m}$.

Ejercicio 1.5.7 · Partícula en una circunferencia

Adaptado de: 1er final 2013-1, versión A, problema 2

Una partícula P se mueve en sentido antihorario sobre una circunferencia de 27 ft de radio según $s = t^4/4$ (s en ft, t en s), con s medida desde el punto O, el extremo derecho del diámetro horizontal. A es el extremo izquierdo de ese diámetro y B está a 45° bajo la horizontal, a la derecha del centro (siete octavos de vuelta desde O, es decir, tres octavos después de A: $s_B = \frac{7}{4}\pi r$). Encuentre: a) el instante en que a_n y a_t tienen la misma magnitud; b) la velocidad en A; c) la magnitud y dirección de la aceleración total en B.



Datos. $r = 27$ ft; $s = t^4/4$; $s_A = \pi r$; $s_B = \frac{7}{4}\pi r$.

Planteamiento. $v = \dot{s} = t^3$, $a_t = \ddot{s} = 3t^2$, $a_n = v^2/r = t^6/27$.

Resolución. a) $3t^2 = t^6/27 \Rightarrow t^4 = 81 \Rightarrow t = 3$ s.

b) $s_A = 27\pi = 84.82$ ft: $t^4 = 339.3$, $t = 4.292$ s, $v = t^3 = 79.1$ ft/s. En A el movimiento antihorario apunta hacia abajo.

c) $s_B = 148.44$ ft: $t^4 = 593.8$, $t = 4.936$ s; $v = 120.3$ ft/s,

$$a_t = 3(4.936)^2 = 73.1 \text{ ft/s}^2, \qquad a_n = \frac{120.3^2}{27} = 535.9 \text{ ft/s}^2,$$

$$a = \sqrt{73.1^2 + 535.9^2} = 540.8 \text{ ft/s}^2.$$

En B, $\hat{e}_t$ apunta a 45° hacia arriba y a la derecha y $\hat{e}_n$ a 45° hacia arriba y a la izquierda. Con $\hat{\imath}$ a la derecha:

$$\vec{a} = (-327\,\hat{\imath} + 431\,\hat{\jmath}) \text{ ft/s}^2,$$

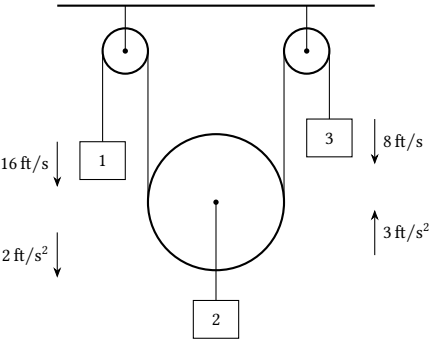
que forma 52.8° con la horizontal, hacia arriba y a la izquierda.

Resultado. a) $t = 3$ s; b) $v_A = 79.1$ ft/s hacia abajo; c) $a_B = 541$ ft/s^2 a 52.8° sobre la horizontal, hacia la izquierda.

Ejercicio 1.5.8 · Sistema de poleas

Adaptado de: 2º final 2010-1, versión A, problema 1

En el sistema de la figura, una sola cuerda sale del cuerpo 1, pasa por una polea fija, baja y rodea la polea móvil de la que cuelga el cuerpo 2, sube a una segunda polea fija y baja al cuerpo 3. El cuerpo 1 baja a 16 ft/s con aceleración de 2 ft/s^2 hacia abajo; el cuerpo 3 baja a 8 ft/s con aceleración de 3 ft/s^2 hacia arriba. Determine la velocidad y la aceleración del cuerpo 2.



Datos. $v_1 = 16\,\text{ft/s}$, $a_1 = 2\,\text{ft/s}^2$ (abajo); $v_3 = 8\,\text{ft/s}$ (abajo), $a_3 = 3\,\text{ft/s}^2$ (arriba).
Planteamiento. Movimiento dependiente. Posiciones y_1, y_2, y_3 medidas hacia abajo desde los ejes de las poleas fijas. La polea móvil está sostenida por dos tramos:

$$y_1 + 2y_2 + y_3 = L \;\Rightarrow\; v_1 + 2v_2 + v_3 = 0, \quad a_1 + 2a_2 + a_3 = 0.$$

Resolución. Con positivo hacia abajo: $16 + 2v_2 + 8 = 0 \Rightarrow v_2 = -12\,\text{ft/s}$; $2 + 2a_2 - 3 = 0 \Rightarrow a_2 = 0.5\,\text{ft/s}^2$.
Resultado. $v_2 = 12\,\text{ft/s}$ hacia arriba; $a_2 = 0.5\,\text{ft/s}^2$ hacia abajo.

1.6 Ejercicios propuestos

Ejercicio propuesto 1.6.1 · Tren que frena

Adaptado de: 1er final 2015-1, versión D, problema 1

Un tren que viaja a 60 mi/h necesita 250 ft para detenerse si frena de manera uniforme. a) ¿Con qué aceleración frena? b) ¿Cuánto tiempo tarda en detenerse?
Resultado: a) $a = -15.49\,\text{ft/s}^2$; b) $t = 5.68\,\text{s}$.
→ Resolución en el Apéndice E, p. 97.

Ejercicio propuesto 1.6.2 · Aceleración proporcional al cuadrado del tiempo

Adaptado de: Extraordinario 2009-2, problema 1

La aceleración de una partícula es directamente proporcional al cuadrado del tiempo. En $t = 0$ la partícula está en $x = 36\,\text{ft}$; en $t = 9\,\text{s}$, $x = 144\,\text{ft}$ y $v = 27\,\text{ft/s}$. Exprese x y v en función de t.
Resultado: $v = 0.02743t^3 + 7$ (ft/s); $x = 0.006859t^4 + 7t + 36$ (ft).
→ Resolución en el Apéndice E, p. 97.

Ejercicio propuesto 1.6.3 · Patrulla que arranca dos segundos después

Adaptado de: 1er final 2015-1, versión B, problema 1

Un automóvil con velocidad constante pasa junto a una patrulla estacionada. Dos segundos después, la patrulla arranca y acelera a razón de $5\,\text{m/s}^2$ hasta 180 km/h; mantiene esa

rapidez durante 12 s y entonces alcanza al automóvil. ¿Qué distancia recorrió la patrulla y cuál era, en km/h, la velocidad del automóvil?

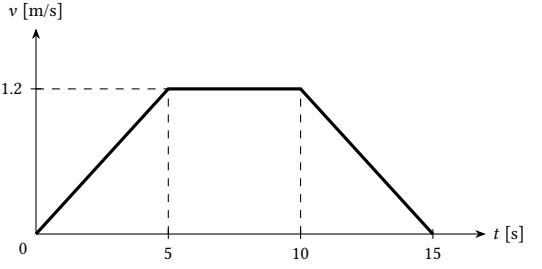
Resultado: 850 m; 127.5 km/h.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 97.

Ejercicio propuesto 1.6.4 · Ascensor con gráfica velocidad-tiempo

Adaptado de: 1er final 2018-2, turno matutino, problema 1

Un ascensor sube del piso 1 al piso 4. Su velocidad crece linealmente de 0 a 1.2 m/s en los primeros 5 s, se mantiene constante de $t = 5$ a $t = 10$ s y disminuye linealmente hasta cero en $t = 15$ s. Determine la distancia entre los pisos 1 y 4 y la aceleración máxima del ascensor.



Resultado: 12 m; 0.24 m/s^2.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 97.

Ejercicio propuesto 1.6.5 · Pelota lanzada contra una pared

Adaptado de: 1er final 2018-1, turno vespertino, problema 1

Se lanza una pelota desde el punto A, a 1.2 m sobre el suelo, hacia una pared vertical situada a 4 m de distancia horizontal. La pelota toca la pared en el punto B, a 0.93 m sobre el suelo, 1.23 s después del lanzamiento. Despreciando la resistencia del aire, determine la magnitud y la dirección de la velocidad inicial $\vec{v}_0$. Use $g = 9.81\,\text{m/s}^2$.

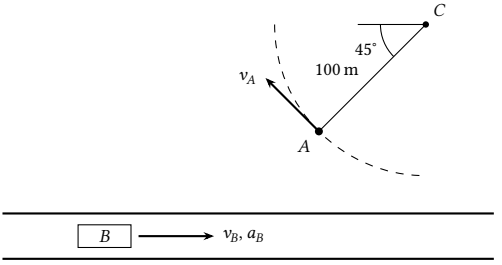
Resultado: $v_0 = 6.66$ m/s a 60.8° sobre la horizontal.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 98.

Ejercicio propuesto 1.6.6 · Velocidad y aceleración relativas de dos autos

Adaptado de: 2º final 2008-2, versión B, problema 2

El auto B avanza hacia la derecha por una calle recta a 65 km/h y acelera a 1200 km/h^2. El auto A recorre con rapidez constante de 20 km/h una curva de 100 m de radio; en el instante indicado, su velocidad apunta hacia arriba y a la izquierda a 45° de la horizontal, y el centro C de la curva está sobre la perpendicular a esa velocidad, arriba y a la derecha de A. Determine la velocidad y la aceleración de A relativas a B.



Resultado: $v_{A/B} = 80.4\,\text{km/h}$ hacia la izquierda, 10.1° sobre la horizontal; $a_{A/B} = 3264\,\text{km/h}^2$ hacia la derecha, 60.1° sobre la horizontal.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 98.

1.7 Errores frecuentes

- Usar $v^2 = v_0^2 + 2a\Delta x$ cuando la aceleración no es constante ($a = kt^2$, $a = -kv^2$, gráficas inclinadas).
- Confundir desplazamiento con distancia recorrida: si v cambia de signo, hay que partir el intervalo donde $v = 0$.
- En persecuciones, mezclar relojes: el que arranca después tiene $(t - t_0)$ en su ecuación, y la respuesta puede pedirse desde su arranque.
- Olvidar el desnivel inicial en el tiro (el metro entre A y B del esquiador; la altura del punto de lanzamiento).
- En tiro, tomar $a_t = g$: en general $a_t = -g\sin\theta$ (θ de la velocidad sobre la horizontal: negativa al subir, positiva al bajar) y $a_n = g\cos\theta$; solo en la cima $a_t = 0$ y $a_n = g$.
- Derivar mal $s(t)$: si $s = t^4/4$, entonces $v = t^3$ y $a_t = 3t^2$.
- En una pista circular, dar solo a_t (o solo a_n) como «aceleración»: la aceleración total es $\sqrt{a_t^2 + a_n^2}$.
- Mezclar unidades: km/h con m/s, mi/h con ft/s; $g = 32.2\,\text{ft/s}^2$ con datos en pies.
- En poleas, contar una sola vez los dos tramos que sostienen una polea móvil, o usar sentidos positivos distintos para cada cuerpo.

1.8 Formulario de emergencia de la unidad

$$v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}, \quad a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$$

$$v = v_0 + at, \quad x = x_0 + v_0 t + \tfrac{1}{2}at^2, \quad v^2 = v_0^2 + 2a\Delta x$$

$$x = v_0\cos\theta_0\, t, \quad y = v_0\sin\theta_0\, t - \tfrac{1}{2}gt^2, \quad R = \frac{v_0^2\sin 2\theta_0}{g}$$

$$a_t = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s}, \quad a_n = \frac{v^2}{\rho}, \quad a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2}$$

$$\text{tiro: } a_n = g\cos\theta, \quad \rho = \frac{v^2}{g\cos\theta}, \quad \rho_{\text{cima}} = \frac{v_x^2}{g}$$

$$\textstyle\sum c_i y_i = L \;\Rightarrow\; \sum c_i v_i = 0,\ \sum c_i a_i = 0; \qquad \vec{v}_{A/B} = \vec{v}_A - \vec{v}_B$$

$$g = 9.81\,\mathrm{m/s^2} = 32.2\,\mathrm{ft/s^2}; \quad 1\,\mathrm{mi/h} = 1.4667\,\mathrm{ft/s}; \quad 1\,\mathrm{km/h} = 0.2778\,\mathrm{m/s}$$

1.9 Procedimiento recomendado en el examen

1. Clasifica el problema con la tabla de la sección 1.2 (1 min).
2. Dibuja un esquema con origen, ejes, sentido positivo y todos los datos convertidos a unidades coherentes.
3. Si la aceleración no es constante, separa variables e integra; si es constante, usa las tres fórmulas.
4. En persecución o tiro, escribe una ecuación de posición por móvil o por eje y plantea la condición de encuentro o de llegada.
5. Si piden aceleración en una curva, da a_t, a_n, la magnitud y la dirección.
6. Revisa signos, unidades y que el tiempo obtenido caiga en el tramo que supusiste.

Unidad 2 · Cinética de la partícula: segunda ley con fricción, cuerpos conectados y movimiento curvilíneo

Objetivo (programa de la asignatura). El alumno aplicará las leyes de Newton en la resolución de ejercicios de movimiento de la partícula en un plano, donde intervienen las causas que modifican a dicho movimiento.

Instrucciones de emergencia

- **Frecuencia:** aparece en 19 de los 27 exámenes de 2007-2 a 2018-2 (las versiones de un mismo examen cuentan como uno), con 34 problemas si se cuentan todas las versiones, y en 5 de los 8 exámenes desde 2014. Suele ser el problema 2. Varios problemas piden una fuerza (normal o tensión) y además una rapidez que se obtiene con energía (Unidad 3).
- **Tiempo:** de 4 a 5 horas para esta unidad.
- **Ruta corta:**
  1. Lee la sección 2.1 y la tabla de la sección 2.2 (30 min).
  2. Sigue el ejemplo 2.4 tapando la resolución.
  3. Resuelve los ejercicios 2.5 con cronómetro (20 min cada uno).

2.1 Conceptos y expresiones

Segunda ley de Newton. Para una partícula de masa constante, la resultante de las fuerzas es igual a la masa por la aceleración: $\sum \vec{F} = m\vec{a}$. Se escribe por componentes en el sistema de referencia que más simplifique:

$$\sum F_x = ma_x, \quad \sum F_y = ma_y \qquad \text{o} \qquad \sum F_t = ma_t, \quad \sum F_n = ma_n.$$

En una dirección fija en la que la partícula no se mueve, la aceleración es cero (por ejemplo, perpendicular a un plano fijo mientras se mantiene el contacto: $\sum F_y = 0$). Ojo: en la dirección normal de una trayectoria curva no hay velocidad, pero sí aceleración, $a_n = v^2/\rho$.

Peso y masa. $W = mg$, con $g = 9.81\,\text{m/s}^2$ (o $32.2\,\text{ft/s}^2$). Si el enunciado da el peso en newtons o libras, la masa es $m = W/g$; en el sistema inglés la masa sale en slugs. Algunos enunciados dicen «pesa 2000 kg»: se trata de la masa.

Fricción seca (Coulomb). La fuerza de fricción es tangente a la superficie y se opone al deslizamiento (o a la tendencia a deslizar):

- **Sin movimiento:** F_r es la que haga falta para el equilibrio, con $F_r \le \mu_s N$.
- **A punto de deslizar:** $F_r = \mu_s N$.
- **Deslizando:** $F_r = \mu_k N$, opuesta a la velocidad relativa.

Cuando el cuerpo parte del reposo hay que comprobar primero si se mueve: se supone el equilibrio, se calcula la fricción necesaria y se compara con $\mu_s N$.

Plano inclinado un ángulo θ. Con x a lo largo del plano y y perpendicular: $N = mg\cos\theta$ (si no hay otras fuerzas perpendiculares) y la componente del peso a lo largo del plano es $mg\sin\theta$. Si la pendiente se da como 3:4, entonces $\sin\theta = 3/5$ y $\cos\theta = 4/5$. En un cuerpo

que sube, la fricción y $mg\sin\theta$ apuntan hacia abajo del plano; en uno que baja, la fricción apunta hacia arriba.

Cuerpos conectados. Una cuerda ideal (inextensible y sin masa) que pasa por poleas sin masa ni fricción tiene la misma tensión en todos sus tramos. Si un cuerpo cuelga de n tramos de la misma cuerda, sobre él actúa nT y su desplazamiento es $1/n$ del desplazamiento del extremo libre: $a_{\text{libre}} = n\,a_B$.

Componentes normal y tangencial. En trayectoria curva, con $\hat{e}_t$ en la dirección de la velocidad y $\hat{e}_n$ hacia el centro de curvatura:

$$a_t = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s}, \qquad a_n = \frac{v^2}{\rho} = \omega^2 r.$$

La fuerza resultante hacia el centro ($\sum F_n$) es la que produce a_n; no existe una «fuerza centrífuga» en el diagrama de cuerpo libre. En una circunferencia de radio r, $\mathrm{d}s = r\,\mathrm{d}\theta$.

Casos de movimiento curvilíneo que se repiten:

- **Curva peraltada sin fricción:** $v^2 = gR\tan\theta$.
- **Curva peraltada a punto de deslizar hacia afuera:**

  $$v^2 = gR\,\frac{\sin\theta + \mu_s\cos\theta}{\cos\theta - \mu_s\sin\theta} = gR\tan(\theta+\phi), \qquad \tan\phi = \mu_s.$$

  Hacia adentro (rapidez mínima) se cambia el signo de μ_s: $v^2_{\text{mín}} = gR\tan(\theta-\phi)$. Si $\mu_s \geq \tan\theta$, la fricción sostiene el reposo y $v_{\text{mín}} = 0$.
- **Curva plana:** $\mu_s mg = mv^2/R$, de donde $v_{\text{máx}} = \sqrt{\mu_s gR}$.
- **Péndulo de longitud L:** $T - mg\cos\theta = mv^2/L$ y $a_t = -g\sin\theta$, con θ medido desde la vertical y $\hat{e}_t$ en el sentido en que crece θ. En magnitud, $|a_t| = g\sin|\theta|$: la rapidez aumenta al bajar hacia la vertical y disminuye al subir.
- **Juego giratorio (péndulo cónico):** $T\cos\theta = mg$ y $T\sin\theta = m\omega^2 r$, de donde $\tan\theta = \omega^2 r/g$.
- **Despegue de una superficie convexa:** la partícula deja la superficie cuando $N = 0$, es decir, cuando $mg\cos\theta = mv^2/r$.

2.2 Cómo reconocer el problema

Si el enunciado dice…	Se trata de…	Procedimiento
«coeficientes de fricción estática y cinética», «parte del reposo»	comprobar primero si se mueve	2.3.1
«distancia de frenado», «ruedas que deslizan», «se lanza hacia arriba del plano»	segunda ley en una recta con $F_r = \mu_k N$	2.3.1, 2.3.2
plano inclinado, pendiente 3:4	ejes a lo largo del plano	2.3.2
«cuerpos conectados», cuerdas, poleas móviles	relación de aceleraciones y un DCL por cuerpo	2.3.3
auto con remolque, bloques en contacto	sistema completo y luego un solo cuerpo	2.3.3
«peralte», «curva», «a punto de deslizarse»	$\sum F_n = mv^2/R$ con fricción máxima	2.3.4
péndulo, tensión de la cuerda en un ángulo	componentes n y t (rapidez con energía)	2.3.4
«juego giratorio», «volantín», «gira con rapidez angular constante»	$a_n = \omega^2 r$, $a_t = 0$	2.3.4
«abandona la superficie», «saldrá volando»	$N = 0$ en el punto de despegue	2.3.4
«la normal se duplica», normal en la cima o el fondo de una curva	$\sum F_n = mv^2/\rho$ en ese punto	2.3.4

2.3 Procedimientos

2.3.1 Movimiento rectilíneo con fricción

1. Dibuja el diagrama de cuerpo libre (DCL): peso, normal, fricción, fuerzas aplicadas.
2. Elige x en la dirección del movimiento (o de la tendencia al movimiento).
3. Si el cuerpo parte del reposo, **comprueba si se mueve**: con $a = 0$, calcula la fricción necesaria F_{nec} y compárala con $\mu_s N$. Si $F_{\text{nec}} \leq \mu_s N$, no se mueve y $F_r = F_{\text{nec}}$. Si $F_{\text{nec}} > \mu_s N$, se mueve y $F_r = \mu_k N$.
4. Calcula N con $\sum F_y = 0$ y escribe $\sum F_x = ma$.
5. Con a constante usa $v = v_0 + at$, $v^2 = v_0^2 + 2a\,\Delta x$, $\Delta x = v_0 t + \frac{1}{2}at^2$. Si un cuerpo se detiene, revisa con μ_s si después se queda en reposo.

2.3.2 Plano inclinado

1. Ejes: x a lo largo del plano (sentido del movimiento) y y perpendicular.
2. $\sum F_y = 0$: $N = mg\cos\theta$ más las componentes perpendiculares de otras fuerzas.
3. $\sum F_x = ma$ con $mg\sin\theta$ y F_r con el signo correcto (la fricción siempre contra el movimiento).
4. Sube con fricción: $a = -g(\sin\theta + \mu_k \cos\theta)$. Baja: $a = g(\sin\theta - \mu_k \cos\theta)$.

2.3.3 Partículas conectadas con cuerdas y poleas

1. **Relación de aceleraciones:** escribe la longitud de la cuerda en función de las posiciones y derívala dos veces; o cuenta los tramos que sostienen al cuerpo: si son n, $a_{\text{libre}} = n\,a_B$ y la fuerza sobre él es nT.
2. Decide el sentido del movimiento y **comprueba si hay movimiento** (procedimiento 2.3.1) con las tensiones de equilibrio.
3. DCL y $\sum F = ma$ de cada cuerpo, con el sentido positivo de cada uno en el sentido de su movimiento.

4. Resuelve el sistema: las incógnitas son T y una aceleración (la otra sale de la relación del paso 1).
5. Si se pide una velocidad tras una distancia, usa $v^2 = v_0^2 + 2a\,\Delta x$ con la aceleración del cuerpo correspondiente.
6. **Cuerpos en contacto o enganchados** (auto con remolque): la aceleración común sale del sistema completo; la fuerza entre ellos, del DCL de uno solo.

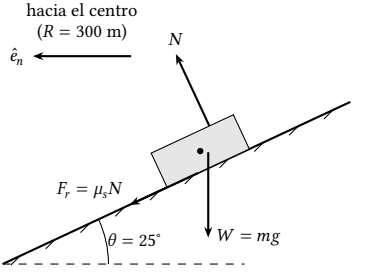
2.3.4 Cinética curvilínea en componentes normal y tangencial

1. Dibuja el DCL en la posición pedida, con $\hat{e}_n$ hacia el centro de curvatura y $\hat{e}_t$ en la dirección de la velocidad.
2. Escribe $\sum F_n = mv^2/\rho$ y $\sum F_t = ma_t$ (si la rapidez es constante, $a_t = 0$).
3. Si falta la rapidez en esa posición, obtenla con energía (Unidad 3) o integrando $a_t = v\,\mathrm{d}v/\mathrm{d}s$ con $\mathrm{d}s = r\,\mathrm{d}\theta$.
4. **Curva peraltada:** usa ejes horizontal ($\hat{e}_n$) y vertical ($\sum F_y = 0$); a punto de deslizar hacia afuera, $F_r = \mu_s N$ hacia abajo del peralte.
5. **Juego giratorio:** radio de giro $r = b + L\sin\theta$; $\sum F_y = 0$ da la tensión y $\sum F_n$ da ω.
6. **Despegue:** impón $N = 0$ y combina con la rapidez obtenida por energía.
7. La aceleración total es $a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2}$.

2.4 Ejemplo resuelto

Ejemplo resuelto · Curva peraltada con fricción

Adaptado del 1er final 2018-2, turno matutino, problema 2.
Un automóvil de 2000 kg toma una curva de 300 m de radio con un peralte de 25°. Se sabe que está a punto de deslizarse hacia afuera de la curva. Si el coeficiente de fricción estática entre las llantas y el pavimento es 0.4, ¿con qué rapidez, en km/h, toma la curva?



Datos. $m = 2000\,\mathrm{kg}$ (no hará falta), $R = 300\,\mathrm{m}$, $\theta = 25°$, $\mu_s = 0.4$, $g = 9.81\,\mathrm{m/s^2}$.
Planteamiento. El automóvil describe una circunferencia horizontal de radio R con rapidez constante: $a_t = 0$ y $a_n = v^2/R$ hacia el centro. Como tiende a salirse hacia afuera (hacia arriba del peralte), la fricción es máxima y apunta hacia abajo del peralte: $F_r = \mu_s N$. Ejes: $\hat{e}_n$ horizontal hacia el centro y y vertical.

Resolución. En la vertical no hay aceleración:

$$\sum F_y = 0 : \quad N\cos\theta - \mu_s N\sin\theta - mg = 0 \;\Rightarrow\; N = \frac{mg}{\cos\theta - \mu_s\sin\theta}.$$

Hacia el centro:

$$\sum F_n = ma_n : \quad N\sin\theta + \mu_s N\cos\theta = m\frac{v^2}{R}.$$

Al dividir una ecuación entre la otra se cancelan N y m:

$$v^2 = gR\,\frac{\sin\theta + \mu_s\cos\theta}{\cos\theta - \mu_s\sin\theta} = gR\tan(\theta+\phi), \qquad \phi = \arctan 0.4 = 21.80^\circ$$
$$v^2 = (9.81)(300)\tan 46.80^\circ = (2943)(1.0649) = 3134\ \text{m}^2/\text{s}^2$$
$$v = 55.98\ \text{m/s} = (55.98)(3.6) = 201.5\ \text{km/h}.$$

Resultado. $v \approx 56.0$ **m/s** $\approx$ **202 km/h**. Sin fricción, la rapidez de diseño sería $v = \sqrt{gR\tan\theta} = 37.0$ m/s $= 133$ km/h; la fricción permite tomar la curva más rápido.

2.5 Ejercicios de examen resueltos

Ejercicio 2.5.1 · Distancia de frenado en una rampa

Adaptado de: 1er final 2009-2, versión B, problema 1

La distancia mínima de frenado de un automóvil que viaja a 90 km/h sobre una superficie horizontal es de 50 m. Determine la distancia mínima de frenado del mismo automóvil si viaja con la misma rapidez hacia abajo de una rampa inclinada 5°.

Datos. $v_0 = 90$ km/h $= 25$ m/s, $d_h = 50$ m, $\theta = 5^\circ$, $g = 9.81$ m/s^2.

Planteamiento. La distancia es mínima cuando la fricción es máxima, $F_r = \mu N$. Con el caso horizontal se obtiene μ; con él se resuelve la rampa. Eje x en la dirección del movimiento.

Resolución. *Horizontal:* $N = mg$ y $-\mu mg = ma$, así que $a = -\mu g$. Con $0 = v_0^2 + 2ad_h$:

$$\mu = \frac{v_0^2}{2gd_h} = \frac{625}{2(9.81)(50)} = 0.637.$$

Rampa hacia abajo: $N = mg\cos 5^\circ$ y

$$\sum F_x = ma : \quad mg\sin 5^\circ - \mu mg\cos 5^\circ = ma$$
$$a = -9.81(0.6346 - 0.0872) = -5.37\ \text{m/s}^2$$
$$d = \frac{v_0^2}{2|a|} = \frac{625}{2(5.37)} = 58.2\ \text{m}$$

Resultado. $d = 58.2$ **m** (la componente del peso a lo largo de la rampa reduce la desaceleración).

Ejercicio 2.5.2 · Automóvil que frena con un remolque

Adaptado de: 1er final 2012-2, versión A, problema 2

Un automóvil de 2000 kg arrastra un remolque de 1000 kg a 90 km/h. Se aplican los frenos del automóvil y sus ruedas deslizan sin girar; el remolque no tiene frenos. Si el coeficiente de fricción entre las llantas del automóvil y el pavimento es $\mu = 0.5$, calcule la fuerza F entre el automóvil y el remolque durante los primeros 1.5 s.

Datos. $m_a = 2000\,\text{kg}$, $m_r = 1000\,\text{kg}$, $v_0 = 25\,\text{m/s}$, $\mu = 0.5$, $t = 1.5\,\text{s}$, $g = 9.81\,\text{m/s}^2$.

Planteamiento. Solo las ruedas del automóvil frenan: la única fuerza horizontal externa sobre el conjunto es $F_r = \mu N_a = \mu m_a g$. La aceleración común sale del conjunto; la fuerza del enganche, del DCL del remolque (sobre él solo actúa F, hacia atrás). Eje x en la dirección del movimiento.

Resolución.

$$\text{Conjunto:}\quad -\mu m_a g = (m_a + m_r)\,a \;\Rightarrow\; a = -\frac{0.5(2000)(9.81)}{3000} = -3.27\,\text{m/s}^2$$

$$\text{Remolque:}\quad -F = m_r a \;\Rightarrow\; F = 1000(3.27) = 3270\,\text{N}$$

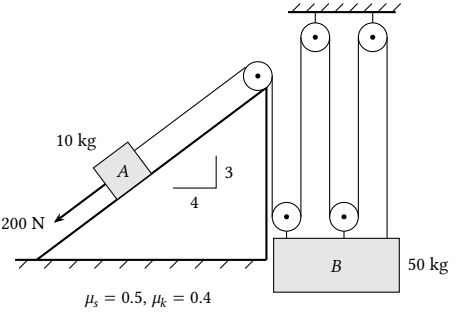
La fuerza es constante mientras las ruedas deslizan; al cabo de 1.5 s, $v = 25 - 3.27(1.5) = 20.1\,\text{m/s}$.

Resultado. $F = 3270$ **N**, un tercio de la fricción: el automóvil frena al remolque empujándolo hacia atrás.

Ejercicio 2.5.3 · Bloque con fuerza aplicada y aparejo de cinco tramos

Adaptado de: 2º final 2010-1, versión B, problema 1

El sistema de la figura está en reposo. El cuerpo A ($m_A = 10\,\text{kg}$) está sobre un plano de pendiente 3:4 y el cuerpo B ($m_B = 50\,\text{kg}$) cuelga de un aparejo: la cuerda que sale de A pasa por una polea en lo alto del plano y forma cinco tramos verticales que sostienen a B. Los coeficientes de fricción entre A y el plano son $\mu_s = 0.5$ y $\mu_k = 0.4$. Se aplica a A una fuerza de 200 N paralela al plano y hacia abajo. Determine la velocidad de B 4 s después. Las poleas y cuerdas son ideales.



Datos. $m_A = 10\,\text{kg}$, $m_B = 50\,\text{kg}$, $\sin\theta = 0.6$, $\cos\theta = 0.8$, $P = 200\,\text{N}$, $\mu_s = 0.5$, $\mu_k = 0.4$, $g = 9.81\,\text{m/s}^2$.

Planteamiento. Cinco tramos sostienen a B: sobre él actúa $5T$ y $a_A = 5a_B$. A tiende a bajar por el plano y B a subir. x hacia abajo del plano para A; y hacia arriba para B.

Resolución. *¿Se mueve?* En equilibrio, $T_0 = m_B g/5 = 98.1\,\text{N}$. La fricción necesaria en A sería $200 + 10(9.81)(0.6) - 98.1 = 160.8\,\text{N}$, mayor que $\mu_s N = 0.5(10)(9.81)(0.8) = 39.2\,\text{N}$: se mueve, y $F_r = \mu_k N = 31.39\,\text{N}$.

$$A: \quad 200 + 58.86 - 31.39 - T = 10\,a_A = 50\,a_B \;\Rightarrow\; T = 227.47 - 50\,a_B$$
$$B: \quad 5T - 490.5 = 50\,a_B \;\Rightarrow\; T = 98.1 + 10\,a_B$$

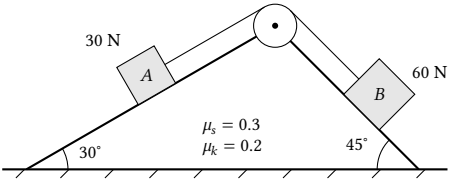
Al igualar: $60\,a_B = 129.37$, $a_B = 2.156\,\text{m/s}^2$ y $T = 119.7\,\text{N}$. Desde el reposo, $v_B = a_B t = 2.156(4) = 8.62\,\text{m/s}$.

Resultado. $v_B = 8.62$ **m/s hacia arriba** (y $a_A = 10.78\,\text{m/s}^2$).

Ejercicio 2.5.4 · Dos cuerpos sobre una cuña

Adaptado de: 1er final 2018-1, turno matutino, problema 2

El cuerpo A, de 30 N, está sobre la cara de una cuña inclinada 30°, y el cuerpo B, de 60 N, sobre la cara opuesta, inclinada 45°. Una cuerda paralela a cada cara los une pasando por una polea en la cumbre. Los coeficientes de fricción estática y cinética entre los cuerpos y las superficies son 0.3 y 0.2. Las cuerdas y las poleas tienen masa despreciable. Determine: a) la aceleración de cada cuerpo; b) la tensión de la cuerda.



Datos. $W_A = 30\,\text{N}$, $W_B = 60\,\text{N}$, $\mu_s = 0.3$, $\mu_k = 0.2$, $g = 9.81\,\text{m/s}^2$.

Planteamiento. La cuerda es inextensible: $a_A = a_B = a$. La componente del peso de B a lo largo de su cara ($60\sin 45^\circ = 42.43\,\text{N}$) supera a la de A ($30\sin 30^\circ = 15\,\text{N}$): B tiende a bajar y A a subir. Para cada cuerpo, x a lo largo de su cara en el sentido del movimiento.

Resolución. Normales: $N_A = 30\cos 30^\circ = 25.98\,\text{N}$ y $N_B = 60\cos 45^\circ = 42.43\,\text{N}$.

¿Se mueve? La fuerza que impulsa al sistema es $42.43 - 15 = 27.43\,\text{N}$ y la fricción estática máxima total es $0.3(25.98 + 42.43) = 20.52\,\text{N}$: se mueve.

$$A: \quad T - 15 - 0.2(25.98) = \frac{30}{9.81}\,a \;\Rightarrow\; T = 20.20 + 3.058\,a$$
$$B: \quad 42.43 - 0.2(42.43) - T = \frac{60}{9.81}\,a \;\Rightarrow\; T = 33.94 - 6.116\,a$$

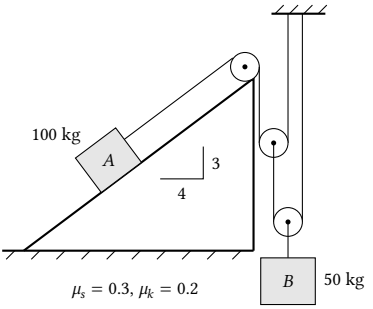
Al igualar: $9.174\,a = 13.75$, de donde $a = 1.498\,\text{m/s}^2$ y $T = 20.20 + 3.058(1.498) = 24.8\,\text{N}$.

Resultado. a) $a_A = a_B = 1.50$ **m/s**^{2} (A sube por su cara y B baja); b) $T = 24.8$ **N**.

Ejercicio 2.5.5 · Plano inclinado y dos poleas móviles

Adaptado de: 1er final 2015-2, versión A, problema 1

Los cuerpos A y B, de 100 y 50 kg, inicialmente en reposo, están conectados como se muestra. A está sobre un plano de pendiente 3:4; su cuerda pasa por una polea fija en lo alto del plano, baja a una polea móvil y sube al techo; del eje de esa polea baja otra cuerda que rodea a una segunda polea móvil, de la que cuelga B, y sube al techo. Los coeficientes de fricción entre el plano y A son $\mu_s = 0.3$ y $\mu_k = 0.2$. Determine la velocidad de A cuando B haya recorrido 0.5 m. Las poleas y las cuerdas tienen masa despreciable.



Datos. $m_A = 100\,\text{kg}$, $m_B = 50\,\text{kg}$, $\sin\theta = 0.6$, $\cos\theta = 0.8$, $\mu_s = 0.3$, $\mu_k = 0.2$, $\Delta s_B = 0.5\,\text{m}$, $g = 9.81\,\text{m/s}^2$.

Planteamiento. Relación de aceleraciones: la primera cuerda da $s_A = 2s_1$ (polea móvil 1) y la segunda, $s_1 = 2s_B$; por tanto $a_A = 4a_B$, y sobre B actúa $4T$. A tiende a bajar por el plano y B a subir.

Resolución. $N = 100(9.81)(0.8) = 784.8\,\text{N}$; la componente del peso de A a lo largo del plano es $100(9.81)(0.6) = 588.6\,\text{N}$.

¿Se mueve? En equilibrio, $T_0 = 50(9.81)/4 = 122.6\,\text{N}$; la fricción necesaria sería $588.6 - 122.6 = 466.0\,\text{N} > \mu_s N = 235.4\,\text{N}$: se mueve, con $F_r = 0.2(784.8) = 156.96\,\text{N}$.

$$A: \quad 588.6 - 156.96 - T = 100\,a_A = 400\,a_B \;\Rightarrow\; T = 431.64 - 400\,a_B$$
$$B: \quad 4T - 490.5 = 50\,a_B \;\Rightarrow\; T = 122.63 + 12.5\,a_B$$

Al igualar: $412.5\,a_B = 309.0$, $a_B = 0.749\,\text{m/s}^2$. Desde el reposo:

$$v_B = \sqrt{2a_B\,\Delta s_B} = \sqrt{2(0.749)(0.5)} = 0.866\,\text{m/s}, \qquad v_A = 4v_B = 3.46\,\text{m/s}.$$

Resultado. $v_A = 3.46$ **m/s hacia abajo del plano** ($v_B = 0.866$ m/s hacia arriba).

Ejercicio 2.5.6 · Tensión de un péndulo

Adaptado de: 1er final 2015-2, versión B, problema 1

Una esfera de 30 kg cuelga de una cuerda de 4 m y lleva una velocidad de 4 m/s hacia la derecha cuando pasa por el punto más bajo ($\theta = 0°$). Determine, para $\theta = 20°$: a) la

tensión de la cuerda; b) la magnitud de la aceleración de la esfera. Desprecie la fricción y el tamaño de la esfera.

Datos. $m = 30\,\text{kg}$, $L = 4\,\text{m}$, $v_0 = 4\,\text{m/s}$, $\theta = 20^\circ$, $g = 9.81\,\text{m/s}^2$.

Planteamiento. Componentes normal (hacia el punto de suspensión) y tangencial. La rapidez en 20° sale de la conservación de la energía (Unidad 3) en una línea: la esfera sube $h = L(1 - \cos 20^\circ) = 0.241\,\text{m}$.

Resolución.

$$v^2 = v_0^2 - 2gh = 16 - 2(9.81)(0.241) = 11.27\,\text{m}^2/\text{s}^2, \qquad a_n = \frac{v^2}{L} = 2.82\,\text{m/s}^2$$

$$\sum F_n = ma_n: \quad T - mg\cos 20^\circ = ma_n \;\Rightarrow\; T = 276.6 + 30(2.82) = 361\,\text{N}$$

$$\sum F_t = ma_t: \quad -mg\sin 20^\circ = ma_t \;\Rightarrow\; a_t = -3.36\,\text{m/s}^2$$

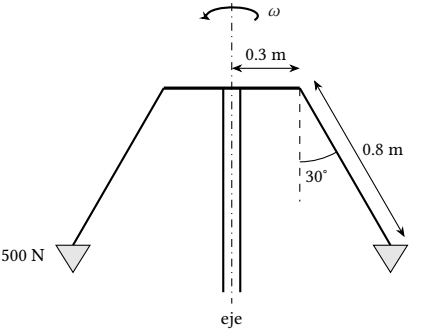
$$a = \sqrt{a_n^2 + a_t^2} = \sqrt{2.82^2 + 3.36^2} = 4.38\,\text{m/s}^2$$

Resultado. a) $T = 361$ **N**; b) $a = 4.38$ **m/s**^{2}.

Ejercicio 2.5.7 · Canastillas de un juego giratorio

Adaptado de: 2º final 2009-2, versión B, problema 2

Las canastillas de un juego de feria cuelgan de barras de 0.8 m articuladas en los extremos de un brazo horizontal, a 0.3 m del eje vertical de giro. El juego gira con rapidez angular constante y las barras forman 30° con la vertical. Las canastillas pesan 500 N y las barras tienen peso despreciable. Calcule: a) la rapidez angular del juego; b) la tensión de las barras.



Datos. $W = 500\,\text{N}$, $b = 0.3\,\text{m}$, $L = 0.8\,\text{m}$, $\theta = 30^\circ$, $g = 9.81\,\text{m/s}^2$.

Planteamiento. Cada canastilla describe una circunferencia horizontal de radio $r = b + L\sin\theta = 0.3 + 0.8(0.5) = 0.7\,\text{m}$, con $a_t = 0$ y $a_n = \omega^2 r$ hacia el eje. Sobre ella actúan el peso y la tensión de la barra.

Resolución.

$$\sum F_y = 0: \quad T\cos 30^\circ = 500 \;\Rightarrow\; T = 577\,\text{N}$$

$$\sum F_n = ma_n: \quad T\sin 30^\circ = \frac{500}{9.81}\,\omega^2(0.7) \;\Rightarrow\; 288.7 = 35.68\,\omega^2$$

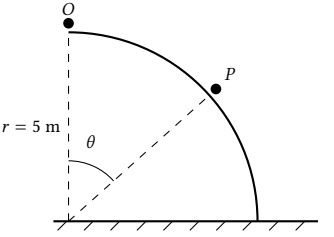
$$\omega = \sqrt{8.09} = 2.84\,\text{rad/s}$$

Resultado. a) $\omega = 2.84$ **rad/s** (≈ 27 rpm); b) $T = 577$ **N**.

Ejercicio 2.5.8 · Punto en que una pelota abandona una superficie circular

Adaptado de: 1er final 2014-2, versión A, problema 2

Una pelota se suelta desde el reposo en el punto más alto O de una resbaladilla lisa en forma de cuarto de circunferencia de 5 m de radio. La pelota no recorre toda la resbaladilla: en un punto P sale volando. Determine la longitud del arco OP que recorre antes de abandonarla. Desprecie las dimensiones de la pelota.



Datos. $r = 5$ m, $v_O = 0$, superficie lisa.

Planteamiento. Sea θ el ángulo de la vertical a la posición de la pelota, medido desde el centro. Componentes: $\hat{e}_t$ a lo largo de la superficie y $\hat{e}_n$ hacia el centro. La pelota se despega cuando $N = 0$.

Resolución. *Tangencial:* $mg\sin\theta = mv\,\mathrm{d}v/\mathrm{d}s$, con $\mathrm{d}s = r\,\mathrm{d}\theta$:

$$\int_0^v v\,\mathrm{d}v = gr\int_0^\theta \sin\theta\,\mathrm{d}\theta \;\Rightarrow\; v^2 = 2gr(1-\cos\theta)$$

(lo mismo que da la conservación de la energía). *Normal:*

$$\sum F_n = ma_n: \qquad mg\cos\theta - N = m\frac{v^2}{r}.$$

Con $N = 0$: $gr\cos\theta = 2gr(1-\cos\theta)$, es decir, $3\cos\theta = 2$:

$$\theta = \arccos\tfrac{2}{3} = 48.19^\circ = 0.841\,\text{rad}, \qquad s = r\theta = 5(0.841) = 4.21\,\text{m}.$$

Resultado. $s_{OP} = 4.21$ **m** (el ángulo de despegue no depende del peso ni del radio).

2.6 Ejercicios propuestos

Ejercicio propuesto 2.6.1 · Caja lanzada hacia arriba de un plano

Adaptado de: 2º final 2018-2, problema 2

Una caja de 40 kg se lanza hacia arriba de un plano inclinado 30° con una rapidez inicial de 18 m/s. Si el coeficiente de fricción cinética entre la caja y el plano es 0.2, calcule el tiempo que tarda en detenerse. Use $g = 9.81\,\text{m/s}^2$.

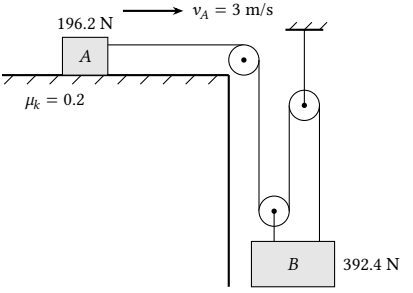
Resultado: $t = 2.73$ s.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 98.

Ejercicio propuesto 2.6.2 · Cuerpo horizontal y cuerpo colgante con tres tramos

Adaptado de: 2º final 2012-1, problema 1

El cuerpo A, de 196.2 N, se mueve sobre una superficie horizontal con coeficiente de fricción cinética 0.2. Su cuerda pasa por una polea fija en la orilla y, con una polea móvil y otra polea fija, forma tres tramos verticales que sostienen al cuerpo B, de 392.4 N. Las poleas y las cuerdas son de peso despreciable. En cierto instante A se mueve hacia la derecha (hacia la orilla) a 3 m/s. Determine su velocidad cuando se haya desplazado 6 m.



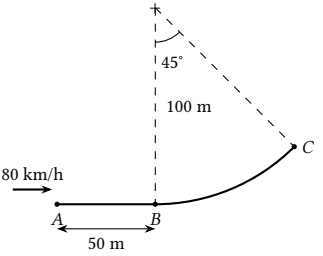
Resultado: $v_A = 7.34\,\text{m/s}$ hacia la derecha ($a_A = 3.75\,\text{m/s}^2$, $T = 114.2$ N).

→ Resolución en el Apéndice E, p. 98.

Ejercicio propuesto 2.6.3 · Auto que frena en una recta y en una curva

Adaptado de: 2º final 2013-1, problema 1

Un auto de 500 kg viaja a 80 km/h por un tramo recto de carretera horizontal. Al pasar por el punto A reduce su velocidad uniformemente hasta detenerse en C. El tramo AB es recto y mide 50 m; el tramo BC es un arco de 45° y 100 m de radio. Determine la magnitud de la fuerza de fricción entre el auto y la carretera en A, en B (ya en la curva) y en C.



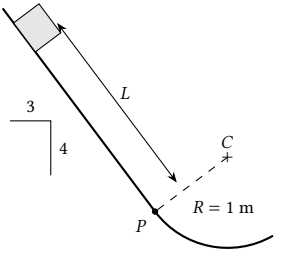
Resultado: $F_A = 960\,\text{N}$, $F_B = 1788\,\text{N}$, $F_C = 960\,\text{N}$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 99.

Ejercicio propuesto 2.6.4 · La normal se duplica al entrar en la curva

Adaptado de: 1er final 2018-2, turno vespertino, problema 2

Un cuerpo parte del reposo sobre un plano de pendiente 4:3 (4 vertical por 3 horizontal) que se une en el punto P con una trayectoria circular de 1 m de radio. Al llegar el cuerpo a P, la fuerza normal que ejerce la superficie sobre él aumenta al doble del valor que tenía en el plano. Si el coeficiente de fricción es 0.5, determine: a) la rapidez del cuerpo al llegar a P; b) la longitud L que recorre sobre el plano.



Resultado: a) $v_P = 2.43\,\text{m/s}$; b) $L = 0.60\,\text{m}$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 99.

Ejercicio propuesto 2.6.5 · Rapidez angular de un volantín

Adaptado de: 1er final 2011-1, versión A, problema 2

Determine la rapidez angular, en rpm, de un volantín de un parque de diversiones para que los brazos de los columpios formen un ángulo $\theta = 60°$ con la vertical. Los brazos, de longitud $L = 9.2\,\text{m}$, cuelgan de puntos situados a $b = 4.6\,\text{m}$ del eje vertical de giro (la geometría es la de la figura del ejercicio 2.5.7).

Resultado: $\omega = 1.16\,\text{rad/s} = 11.1\,\text{rpm}$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 100.

Ejercicio propuesto 2.6.6 · Péndulo que parte de la horizontal

Adaptado de: 2º final 2012-1, problema 2

Un péndulo de 1 m de longitud, con una plomada de 0.2 kg, se suelta desde el reposo con la cuerda horizontal. Calcule la rapidez de la plomada y la tensión de la cuerda cuando la cuerda forma un ángulo $\varphi = 45^\circ$ con la horizontal.

Resultado: $v = 3.72\,\text{m/s}$, $T = 4.16\,\text{N}$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 100.

2.7 Errores frecuentes

- Usar μ_k sin comprobar antes, con μ_s, si el cuerpo se mueve. Si la fricción necesaria es menor que $\mu_s N$, el cuerpo no se mueve y la fricción no vale μN.
- Poner la fricción en el sentido equivocado: siempre se opone al deslizamiento. En un cuerpo que sube por un plano apunta hacia abajo.
- Tomar $N = mg$ en un plano inclinado o cuando hay una fuerza aplicada con componente perpendicular a la superficie.
- Olvidar la relación de aceleraciones con poleas móviles ($a_A = n\,a_B$) o usar T en lugar de nT en el cuerpo que cuelga.
- Escribir «fuerza centrífuga» en el DCL. En el diagrama solo van fuerzas reales; su resultante hacia el centro es mv^2/ρ.
- Usar como radio la longitud de la cuerda en un juego giratorio: el radio es la distancia horizontal al eje, $r = b + L\sin\theta$.
- En la curva peraltada, descomponer el peso en lugar de la normal: con ejes horizontal y vertical, el peso queda entero en y y se descomponen la normal y la fricción.
- Olvidar convertir km/h a m/s (dividir entre 3.6) o confundir peso y masa ($m = W/g$).

2.8 Formulario de emergencia de la unidad

$$\sum F_x = ma_x,\ \ \sum F_y = ma_y; \qquad \sum F_t = ma_t,\ \ \sum F_n = m\frac{v^2}{\rho}$$

$F_r \le \mu_s N$ (reposo), $\qquad F_r = \mu_k N$ (deslizando)

Plano: $N = mg\cos\theta$; $\ a_{\text{sube}} = -g(\sin\theta + \mu_k\cos\theta)$; $\ a_{\text{baja}} = g(\sin\theta - \mu_k\cos\theta)$

n tramos sobre B : $\ F = nT$, $\quad a_{\text{libre}} = n\,a_B$

$$a_t = v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s}, \quad a_n = \frac{v^2}{\rho} = \omega^2 r, \quad a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2}$$

Peralte sin fricción: $v^2 = gR\tan\theta$; con fricción: $v^2 = gR\tan(\theta \pm \phi)$, $\tan\phi = \mu_s$ ($v_{\text{mín}} = 0$ si $\phi \ge \theta$)

Curva plana: $v_{\text{máx}} = \sqrt{\mu_s g R}$; $\qquad$ péndulo: $T = mg\cos\theta + m\dfrac{v^2}{L}$

Juego giratorio: $\tan\theta = \dfrac{\omega^2 r}{g}$, $\ r = b + L\sin\theta$; $\qquad$ despegue: $N = 0$

2.9 Procedimiento recomendado en el examen

1. Dibuja el DCL de cada cuerpo y elige ejes (a lo largo del plano, o n y t si la trayectoria es curva).
2. Si hay fricción estática y el cuerpo parte del reposo, comprueba primero si se mueve.
3. Con poleas, escribe la relación de aceleraciones antes de las ecuaciones de movimiento.
4. Escribe $\sum F = ma$ por componentes y resuelve; si falta una rapidez, obtenla con energía en una línea.
5. Revisa unidades y sentidos, y escribe el resultado con su dirección.

Unidad 3 · Trabajo y energía, impulso y cantidad de movimiento de la partícula

Objetivo (programa de la asignatura). El alumno aplicará el método energético y el de cantidad de movimiento, en la resolución de ejercicios de movimiento de la partícula donde intervienen las causas que lo modifican.

Instrucciones de emergencia

- **Frecuencia:** es la unidad más frecuente: aparece en 26 de los 27 exámenes de 2007-2 a 2018-2 (las versiones de un mismo examen cuentan como uno) y en 7 de los 8 exámenes desde 2014. Son 52 problemas de tema principal contando todas las versiones, más 8 en que es tema secundario. Suele ser el problema 2 o el 3.
- **Tiempo:** de 4 a 5 horas para esta unidad.
- **Ruta corta:**
  1. Lee la sección 3.1 y la tabla de la 3.2 (30 min).
  2. Sigue los dos ejemplos 3.4 tapando la resolución.
  3. Resuelve los ejercicios 3.5 con cronómetro (20 min cada uno); empieza por el 3.5.1, el 3.5.5 y el 3.5.6.

3.1 Conceptos y expresiones

3.1.1 Trabajo y energía

Trabajo de una fuerza. Se define $U_{1\to 2} = \int_1^2 \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{r}$. Si la fuerza es constante y forma un ángulo θ con el desplazamiento d, $U = Fd\cos\theta$. Los trabajos que aparecen en los exámenes son:

Fuerza	Trabajo de 1 a 2
Peso $W = mg$	$U = -W\,(y_2 - y_1) = -\Delta V_g$; positivo si el cuerpo baja
Resorte	$U = -\frac{1}{2}k\,(x_2^2 - x_1^2) = -\Delta V_e$, con x la deformación (alargamiento o compresión) medida desde la longitud natural
Fricción cinética	$U = -\mu_k N\,d$, siempre negativo; d es la distancia recorrida (no el desplazamiento) y N se calcula en cada tramo
Normal; cuerda entre dos cuerpos	no hacen trabajo neto

Energías. Energía cinética $T = \frac{1}{2}mv^2$; energía potencial gravitacional $V_g = Wy = mgh$ (con y hacia arriba desde un nivel de referencia que se elige); energía potencial elástica $V_e = \frac{1}{2}kx^2$.

Teorema del trabajo y la energía. Entre dos estados de una partícula (o de un sistema de partículas unidas por cuerdas inextensibles) se cumple

$$U_{1\to 2} = \Delta T + \Delta V_g + \Delta V_e,$$

donde $U_{1\to 2}$ es el trabajo de las fuerzas que **no** tienen energía potencial: fricción y fuerzas aplicadas. Si la fricción cambia por tramos (otro μ, otra pendiente), $U_{1\to 2}$ es la suma de los trabajos de cada tramo.

Conservación de la energía mecánica. Si $U_{1\to 2} = 0$ (superficies lisas, solo pesos y resortes):

$$T_A + V_{g,A} + V_{e,A} = T_B + V_{g,B} + V_{e,B}.$$

La rapidez en un punto depende solo de la altura y de la deformación del resorte, no de la forma de la trayectoria: vale para rizos, tubos, toboganes y para un proyectil en el aire.

Potencia. $P = \mathrm{d}U/\mathrm{d}t = \vec{F}\cdot\vec{v}$, en W (o ft·lb/s; 1 hp = 550 ft·lb/s). No apareció en los exámenes de 2007-2 a 2018-2; basta conocer la definición.

3.1.2 Impulso y cantidad de movimiento

Principio de impulso y cantidad de movimiento. La cantidad de movimiento es $m\vec{v}$ y el impulso de una fuerza es $\int \vec{F}\,\mathrm{d}t$. Entre dos instantes:

$$m\vec{v}_1 + \int_{t_1}^{t_2} \sum \vec{F}\,\mathrm{d}t = m\vec{v}_2,$$

que se aplica por componentes. Si la fuerza está dada por una gráfica F-t, su impulso es el **área bajo la gráfica**. El impulso de una fuerza constante es $F\,\Delta t$. La **fuerza promedio** durante Δt es $\vec{F}_{\text{prom}} = \Delta(m\vec{v})/\Delta t$.

Arranque y paro con fricción. Un cuerpo en reposo no se mueve mientras $F \le \mu_s N$: en ese lapso la fricción estática equilibra a F y el impulso neto es cero. El impulso empieza a contar en el instante t_0 en que $F = \mu_s N$; desde ahí la fricción vale $\mu_k N$ (si $\mu_s > \mu_k$, la fuerza neta salta de cero a $(\mu_s - \mu_k)N$). Si el cuerpo vuelve a detenerse, la fricción pasa otra vez a ser estática y hay que revisar si arranca de nuevo.

Choques. Durante un choque las fuerzas entre los cuerpos son internas y muy grandes frente a las demás, así que se conserva la cantidad de movimiento del sistema:

$$m_A v_A + m_B v_B = m_A v'_A + m_B v'_B.$$

El **coeficiente de restitución** relaciona las velocidades relativas de separación y de acercamiento:

$$e = \frac{v'_B - v'_A}{v_A - v_B}, \qquad 0 \le e \le 1.$$

Con $e = 1$ el choque es elástico (no se pierde energía); con $e = 0$ es plástico (los cuerpos quedan juntos). La energía perdida es $T_{\text{antes}} - T_{\text{después}}$.

3.2 Cómo reconocer el problema

Si el enunciado dice…	Se trata de…	Proc.
«se suelta», «se detiene exactamente en», fricción distinta en dos tramos	trabajo y energía por tramos	3.3.1
resorte con fricción, «máxima compresión», «distancia hasta detenerse»	trabajo y energía por tramos	3.3.1
superficie lisa, resorte, collarín en guía, cuerda elástica	conservación de la energía	3.3.2
rizo, bucle, «en la cima», tubo, tobogán y luego cae	conservación de la energía y $a_n = v^2/\rho$	3.3.2
cuerpos unidos por cuerdas y poleas, «distancia para alcanzar una rapidez»	energía de cuerpos conectados	3.3.3
gráfica *F*-*t*, «velocidad en $t = \ldots$», «instante en que se detiene»	impulso con fuerza variable	3.3.4
«a punto de derrapar», fuerza constante durante Δt, «incremento de la cantidad de movimiento»	impulso con fuerza constante o promedio	3.3.5
«choca», «alcanza», «se pierde el … % de la energía», bala que atraviesa	choque: cantidad de movimiento y e	3.3.6

Energía o impulso. Si el enunciado habla de **distancias o posiciones**, se usa energía; si habla de **tiempos** o da una gráfica *F*-*t*, se usa impulso; si hay un choque, impulso durante el choque y energía antes y después.

3.3 Procedimientos

3.3.1 Trabajo y energía con fricción por tramos

1. Numera los estados donde cambia algo: inicio, cambio de μ o de pendiente, contacto con el resorte, compresión máxima, punto final.
2. Dibuja el DCL en cada tramo y calcula N con $\sum F_n = 0$ (en un plano, $N = mg\cos\theta$).
3. En cada tramo escribe $U_{1\to2} = \Delta T + \Delta V_g + \Delta V_e$, con $U_{1\to2} = -\mu_k N d$.
4. Si un dato intermedio no se pide, escribe una sola ecuación del estado inicial al final sumando los trabajos de fricción de todos los tramos.
5. En la compresión máxima $v = 0$: queda una cuadrática en x; toma la raíz positiva.
6. Para saber si el cuerpo regresa después de comprimir el resorte, compara kx con $\mu_s N$ (o con μN si solo hay un coeficiente).

3.3.2 Conservación de la energía mecánica

1. Verifica que no haya fricción ni fuerzas aplicadas; elige el nivel de referencia ($y = 0$) en el punto más bajo.
2. Para cada estado anota v, y y la deformación x del resorte (no su longitud).
3. Escribe $T_A + V_A = T_B + V_B$ y despeja la incógnita.
4. Rizo o punto de una curva: con v calcula $a_n = v^2/\rho$ y, si piden fuerza, $\sum F_n = ma_n$. En la cima de un rizo, para no despegarse se necesita $v^2 \geq g\rho$.
5. Tiro parabólico después de la rampa: la energía da la magnitud de la velocidad; la componente horizontal no cambia, y con ella sale la dirección.
6. Cuerda elástica: con los datos de tensión obtén k y la longitud natural; luego usa

$V_e = \frac{1}{2}kx^2$ con el alargamiento.

3.3.3 Cuerpos conectados por energía

1. Escribe la longitud de la cuerda y deriva: con una polea móvil, $s_B = 2s_A$ y $v_B = 2v_A$.
2. Toma el sistema completo: la tensión no hace trabajo neto.
3. $U_{1\to 2}$ es solo la fricción; ΔT y ΔV_g incluyen a todos los cuerpos.
4. Despeja la distancia o la rapidez. Si piden la tensión, aplica el teorema a un solo cuerpo: ahí la tensión sí hace trabajo.

3.3.4 Impulso con fuerza variable dada por una gráfica

1. Escribe $F(t)$ por tramos a partir de la gráfica.
2. Calcula la fricción máxima $\mu_s N$ y el instante t_0 en que $F = \mu_s N$. Antes de t_0 el cuerpo no se mueve.
3. Desde t_0: $mv_2 = mv_1 + \int_{t_0}^{t} (F - \mu_k N)\,\mathrm{d}t$. El impulso de F es el área bajo la gráfica entre t_0 y t.
4. Si F baja o cambia de sentido, busca el instante en que $v = 0$; desde ahí repite el paso 2 con el sentido nuevo.
5. Si piden distancia, integra $v(t)$.

3.3.5 Impulso con fuerza constante e impulso promedio

1. Identifica la fuerza que impulsa: en un vehículo es la fricción en la llanta motriz; «a punto de derrapar» significa $F = \mu_s N$, y «derrapando», $F = \mu_k N$.
2. Impulso $= F\,\Delta t$; velocidad final $v_2 = v_1 + F\Delta t/m$.
3. Impulso promedio: $\vec{F}_{\text{prom}} = \Delta(m\vec{v})/\Delta t$, por componentes.

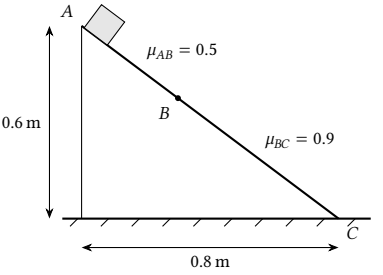
3.3.6 Choques

1. Escribe la conservación de la cantidad de movimiento del sistema en la dirección del choque, con signos.
2. Segunda ecuación: el coeficiente de restitución e, la fracción de energía que se pierde, o la velocidad final de uno de los cuerpos (una bala que atraviesa).
3. Si sale una cuadrática, elige la raíz con sentido físico: el cuerpo de adelante no puede quedar más lento que el de atrás.
4. Después del choque cada cuerpo sigue por su cuenta: usa trabajo y energía (3.3.1) para la distancia hasta detenerse.

3.4 Ejemplo resuelto

Ejemplo resuelto · Paquete que se detiene al pie de un plano con dos tramos de fricción

Adaptado del 2º final 2018-1, problema 2.
Un paquete se suelta desde el reposo en el punto A, en lo alto de un plano inclinado de 0.6 m de altura y 0.8 m de base. El coeficiente de fricción cinética es 0.5 en el tramo AB y 0.9 en el tramo BC. Determine la distancia AB si el paquete se detiene exactamente en C, al pie del plano.



Datos. Longitud del plano $L = \sqrt{0.6^2 + 0.8^2} = 1.0\,\text{m}$; $\sin\theta = 0.6$, $\cos\theta = 0.8$; $\mu_{AB} = 0.5$, $\mu_{BC} = 0.9$; $v_A = v_C = 0$. Sea $d = AB$; entonces $BC = 1 - d$.
Planteamiento. Eje a lo largo del plano. En los dos tramos el DCL tiene peso, normal y fricción hacia arriba del plano; $\sum F_n = 0$ da $N = mg\cos\theta = 0.8\,mg$. Del estado A al estado C:

$$U_{A\to C} = \Delta T + \Delta V_g, \qquad \Delta T = 0, \quad \Delta V_g = -mg(0.6).$$

Resolución. El trabajo de la fricción es la suma de los dos tramos:

$$\begin{aligned} U_{A\to C} &= -0.5(0.8\,mg)\,d - 0.9(0.8\,mg)(1-d) \\ &= mg\,(-0.72 + 0.32\,d). \end{aligned}$$

Igualando con ΔV_g y cancelando mg:

$$-0.72 + 0.32\,d = -0.6 \quad \Rightarrow \quad d = \frac{0.12}{0.32} = 0.375\,\text{m}.$$

Comprobación: en AB, $\tan\theta = 0.75 > 0.5$, así que el paquete arranca solo; en BC, $0.75 < 0.9$, así que frena. En B lleva $v_B = \sqrt{2g\,d\,(0.6 - 0.5\cdot 0.8)} = 1.21\,\text{m/s}$.
Resultado. $AB = 0.375\,\text{m}$ (y $BC = 0.625\,\text{m}$). La masa y g no influyen.

Ejemplo resuelto · Impulso de la llanta motriz de una motocicleta

Adaptado del 1er final 2011-2, versión C, problema 2.
Una motocicleta acelera a tasa constante durante 5 s, a punto de derrapar. La llanta trasera (motriz) soporta el 55 % del peso durante ese lapso, y el conjunto de motocicleta y piloto pesa 450 lb. Los coeficientes de fricción estática y cinética entre la llanta y el pavimento son 0.7 y 0.3. Determine: a) el impulso que recibe la motocicleta por la acción de la llanta; b) su velocidad al final del intervalo, si parte del reposo; c) la velocidad que alcanzaría en el mismo lapso si la llanta trasera derrapara.
Datos. $W = 450\,\text{lb}$, $g = 32.2\,\text{ft/s}^2$, $m = 450/32.2 = 13.98\,\text{slug}$; normal en la llanta trasera $N_T = 0.55(450) = 247.5\,\text{lb}$; $\mu_s = 0.7$, $\mu_k = 0.3$; $\Delta t = 5\,\text{s}$; $v_1 = 0$.
Planteamiento. Eje x en el sentido del movimiento. La única fuerza horizontal es la fricción del pavimento sobre la llanta motriz, hacia adelante (la llanta empuja el piso hacia atrás). Mientras no derrapa es fricción estática, y «a punto de derrapar»

significa que vale su máximo $\mu_s N_T$. Principio de impulso y cantidad de movimiento: $mv_1 + F\Delta t = mv_2$.

Resolución.

a) $F = \mu_s N_T = 0.7(247.5) = 173.3\,\text{lb}$; impulso $F\Delta t = 173.3(5) = 866\,\text{lb s}$.

b) $v_2 = \dfrac{F\Delta t}{m} = \dfrac{866(32.2)}{450} = 62.0\,\text{ft/s}$.

c) Derrapando, la fricción es cinética: $F' = 0.3(247.5) = 74.3\,\text{lb}$; impulso $371\,\text{lb s}$; $v_2' = 371(32.2)/450 = 26.6\,\text{ft/s}$.

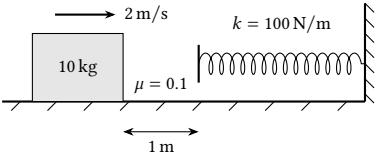
Resultado. a) 866 lb s hacia adelante; b) 62.0 ft/s; c) 26.6 ft/s. Derrapar reduce a menos de la mitad la velocidad que se gana.

3.5 Ejercicios de examen resueltos

Ejercicio 3.5.1 · Cuerpo que comprime un resorte sobre un piso con fricción

Adaptado de: 1er final 2015-1, versión A, problema 2

Un cuerpo de 10 kg se mueve hacia la derecha a 2 m/s cuando está a 1 m de un resorte de constante $k = 100\,\text{N/m}$, que tiene su longitud natural. El coeficiente de fricción cinética entre el cuerpo y el piso es 0.1. Determine: a) la compresión máxima del resorte; b) la distancia que recorre el cuerpo desde que toca el resorte hasta que se detiene en su camino de regreso.



Datos. $m = 10\,\text{kg}$, $v_0 = 2\,\text{m/s}$, $k = 100\,\text{N/m}$, $\mu = 0.1$, $g = 9.81\,\text{m/s}^2$. Fricción en todo el recorrido: $F_r = \mu mg = 9.81\,\text{N}$.

Planteamiento. Eje x horizontal. DCL: peso, normal $N = mg$, fricción opuesta al movimiento y, en contacto, fuerza del resorte. En cada tramo, $U_{1\to 2} = \Delta T + \Delta V_e$ con $U_{1\to 2} = -F_r d$.

Resolución.

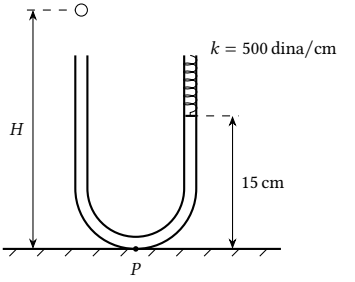
1. Hasta el resorte (1 m): $T = \frac{1}{2}(10)(2^2) - 9.81(1) = 10.19\,\text{J}$ ($v = 1.43\,\text{m/s}$).
2. Compresión x hasta $v = 0$: $-9.81x = (0 - 10.19) + \frac{1}{2}(100)x^2$, es decir, $50x^2 + 9.81x - 10.19 = 0$, de donde $x = 0.364\,\text{m}$.
3. ¿Regresa? $kx = 36.4\,\text{N} > 9.81\,\text{N}$: sí.
4. Regreso hasta que el resorte recupera su longitud: $-9.81(0.364) = T - \frac{1}{2}(100)(0.364^2)$, así que $T = 6.62 - 3.57 = 3.05\,\text{J}$ ($v = 0.78\,\text{m/s}$).
5. Ya libre, la fricción lo detiene: $-9.81\,x_3 = 0 - 3.05$, de donde $x_3 = 0.311\,\text{m}$.
6. Distancia desde el contacto: $2(0.364) + 0.311 = 1.04\,\text{m}$.

Resultado. a) $x_{\text{máx}} = 0.364\,\text{m}$; b) 1.04 m desde que toca el resorte (se detiene a 0.311 m del extremo libre; contando desde la posición inicial recorre 2.04 m).

Ejercicio 3.5.2 · Esfera que entra a un tubo en U y comprime un resorte

Adaptado de: 2º final 2015-2, problema 2

Una esfera de 1 g se deja caer desde una altura H sobre el piso y entra por la rama izquierda de un tubo liso en forma de U, cuyo punto más bajo P toca el piso. En la rama derecha cuelga un resorte de constante $k = 500$ dina/cm, sin deformar, cuyo extremo libre está a 15 cm sobre el piso. La esfera comprime el resorte 5 cm. Determine: a) la altura H; b) la velocidad de la esfera en el punto P.



Datos. Sistema cegesimal: $m = 1$ g, $g = 981$ cm/s^2, $k = 500$ dina/cm; compresión $x = 5$ cm; en la compresión máxima la esfera está a $15 + 5 = 20$ cm del piso.

Planteamiento. Tubo liso: se conserva la energía. Nivel de referencia en el piso (punto P). Estado inicial: reposo a la altura H. Estado final: compresión máxima, $v = 0$, $y = 20$ cm.

Resolución.

a) $0 = \Delta T + \Delta V_g + \Delta V_e = 0 + mg(20 - H) + \frac{1}{2}kx^2$:

$$H = 20 + \frac{\frac{1}{2}(500)(5^2)}{(1)(981)} = 20 + \frac{6250}{981} = 26.4\,\text{cm}.$$

b) Del estado inicial a P ($y = 0$, resorte sin tocar): $\frac{1}{2}mv_P^2 = mgH$, así que

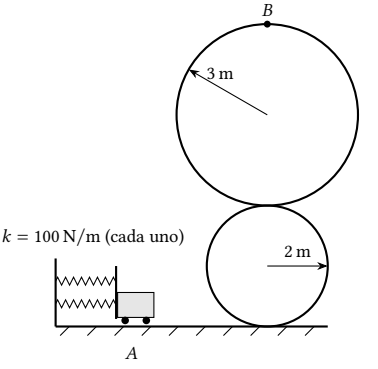
$$v_P = \sqrt{2gH} = \sqrt{2(981)(26.37)} = 227\,\text{cm/s}.$$

Resultado. a) $H = 26.4$ cm; b) $v_P = 227$ cm/s $= 2.27$ m/s, horizontal (hacia la rama derecha).

Ejercicio 3.5.3 · Carro impulsado por resortes que recorre dos bucles

Adaptado de: 1er final 2015-2, versión B, problema 2

Un carro de 2 kg está en reposo en A, comprimiendo 2 m dos resortes idénticos de $k = 100$ N/m. Al soltarse recorre primero un bucle de 2 m de radio y luego otro de 3 m, colocado encima del primero. Sin fricción, determine la componente normal de la aceleración del carro en la cima B del bucle de 3 m.



Datos. $m = 2\,\text{kg}$; dos resortes de $k = 100\,\text{N/m}$ con $x = 2\,\text{m}$; $g = 9.81\,\text{m/s}^2$. La cima B está a $2(2) + 2(3) = 10\,\text{m}$ sobre A.

Planteamiento. Sin fricción: $T_A + V_{g,A} + V_{e,A} = T_B + V_{g,B} + V_{e,B}$, con referencia en el nivel de A. En B, $a_n = v_B^2/\rho$ con $\rho = 3\,\text{m}$.

Resolución.

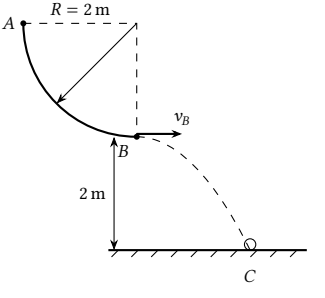
1. Energía de los dos resortes: $V_{e,A} = 2 \cdot \frac{1}{2}(100)(2^2) = 400\,\text{J}$.
2. $400 = \frac{1}{2}(2)v_B^2 + 2(9.81)(10)$, de donde $v_B^2 = 203.8\,\text{m}^2/\text{s}^2$ y $v_B = 14.3\,\text{m/s}$.
3. $a_n = 203.8/3 = 67.9\,\text{m/s}^2$, hacia el centro del bucle (hacia abajo).
4. Comprobación: en la cima del bucle pequeño, $v^2 = 400 - 2(9.81)(4) = 321.5 > g\rho = 19.6$, y en B, $a_n > g$: el carro no se despega.

Resultado. $a_n = 67.9\,\text{m/s}^2$, hacia abajo (con $v_B = 14.3\,\text{m/s}$).

Ejercicio 3.5.4 · Partícula que sale de un tobogán y cae al piso

Adaptado de: 1er final 2009-2, versión B, problema 2

Una partícula de peso P se suelta desde el reposo en el punto A de un tobogán liso con forma de cuarto de circunferencia de 2 m de radio. Sale horizontalmente por el extremo inferior B y cae 2 m hasta el piso, en C. Determine, justo antes de tocar el piso: a) la magnitud de la velocidad; b) el radio de curvatura de la trayectoria.



Datos. $R = 2\,\text{m}$; caída de B al piso 2 m; $g = 9.81\,\text{m/s}^2$; superficie lisa y sin resistencia del aire.

Planteamiento. Energía de A a B y de A a C (solo trabaja el peso). En el aire la componente horizontal de la velocidad no cambia. El radio de curvatura sale de $a_n = v^2/\rho$, donde a_n es la componente de g perpendicular a la velocidad.

Resolución.

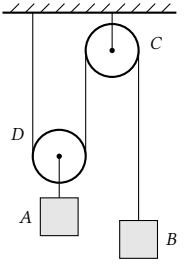
1. En B (bajó R): $v_B = \sqrt{2gR} = \sqrt{2(9.81)(2)} = 6.26\,\text{m/s}$, horizontal.
2. En C (bajó 4 m desde A): $v_C = \sqrt{2(9.81)(4)} = 8.86\,\text{m/s}$.
3. Dirección: $\cos\theta = v_x/v_C = 6.26/8.86 = 0.707$, así que $\theta = 45°$ bajo la horizontal.
4. $a_n = g\cos\theta = 9.81(0.707) = 6.94\,\text{m/s}^2$; $\rho = v_C^2/a_n = 78.5/6.94 = 11.3\,\text{m}$.

Resultado. a) $v_C = 8.86\,\text{m/s}$, a 45° bajo la horizontal; b) $\rho = 11.3\,\text{m}$. No dependen del peso P.

Ejercicio 3.5.5 · Dos cuerpos unidos por una polea móvil

Adaptado de: 2º final 2015-2, problema 1

Dos cuerpos pequeños A y B, de 5 N cada uno, están en reposo. A cuelga de una polea móvil D; la cuerda va del techo, rodea a D, sube a la polea fija C y baja hasta B. Con poleas y cuerdas ideales, determine la distancia que debe descender B para alcanzar una rapidez de 2 m/s, y la tensión de la cuerda.



Datos. $W_A = W_B = 5\,\text{N}$, $m = 5/9.81 = 0.510\,\text{kg}$; $v_B = 2\,\text{m/s}$; $g = 9.81\,\text{m/s}^2$.

Planteamiento. Longitud de cuerda: $2s_A + s_B =$ constante (posiciones medidas hacia abajo), así que $v_A = v_B/2 = 1\,\text{m/s}$ y, si B baja s, A sube $s/2$. Sistema completo, sin fricción: $0 = \Delta T + \Delta V_g$. Para la tensión, teorema del trabajo y la energía aplicado solo a B.

Resolución.

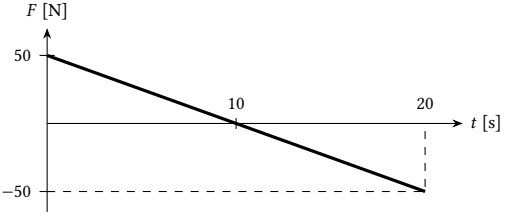
1. $\Delta T = \frac{1}{2}(0.510)(2^2) + \frac{1}{2}(0.510)(1^2) = 1.274\,\text{J}$.
2. $\Delta V_g = -5s + 5(s/2) = -2.5\,s$.
3. $0 = 1.274 - 2.5\,s$, de donde $s = 0.510\,\text{m}$.
4. Cuerpo B: $(5 - T)s = \frac{1}{2}mv_B^2$, es decir, $5 - T = 1.019/0.510 = 2.00$, de donde $T = 3.00\,\text{N}$.

Resultado. B desciende $s = 0.510\,\text{m}$; tensión $T = 3.00\,\text{N}$ (la aceleración de B es $v_B^2/2s = 3.92\,\text{m/s}^2$).

Ejercicio 3.5.6 · Caja con fuerza que decrece y cambia de sentido

Adaptado de: 1er final 2013-2, versión A, problema 1

Sobre una caja de 5 kg en reposo actúa desde $t = 0$ una fuerza horizontal que decrece linealmente: vale 50 N en $t = 0$, cero en $t = 10$ s y -50 N en $t = 20$ s. Los coeficientes de fricción estática y cinética son ambos 0.4. Determine la distancia que recorre la caja de $t = 0$ a $t = 15$ s.



Datos. $m = 5\,\text{kg}$, $g = 9.81\,\text{m/s}^2$, $\mu_s = \mu_k = 0.4$; $F = 50 - 5t$ [N]; fricción máxima $0.4(5)(9.81) = 19.62$ N.

Planteamiento. Eje x positivo en el sentido inicial de F. Impulso y cantidad de movimiento desde que arranca, con la fricción opuesta a la velocidad; luego se integra $v(t)$ para la distancia.

Resolución.

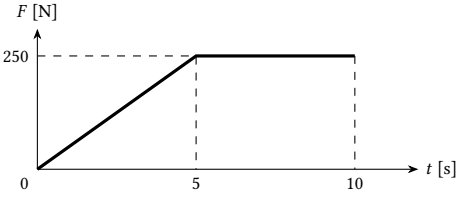
1. En $t = 0$, $F = 50\,\text{N} > 19.62\,\text{N}$: arranca de inmediato.
2. $mv = \int_0^t (50 - 5u - 19.62)\,\mathrm{d}u = 30.38\,t - 2.5\,t^2$, así que $v = 6.076\,t - 0.5\,t^2$.
3. Se detiene cuando $v = 0$: $t_a = 12.15$ s. Distancia: $x = 3.038\,t^2 - t^3/6$, que en t_a vale 149.5 m.
4. En t_a, $F = 50 - 5(12.15) = -10.8\,\text{N}$; como $|F| < 19.62$, la caja sigue en reposo hasta que $5t - 50 = 19.62$, en $t_b = 13.92$ s.
5. Desde t_b se mueve hacia atrás: $mv = \int_{t_b}^t (5u - 50 - 19.62)\,\mathrm{d}u = 2.5(t - t_b)^2$, así que $v = 0.5\tau^2$ y $x = \tau^3/6$ con $\tau = t - t_b$. En $t = 15$, $\tau = 1.08$ s y $x = 0.21$ m.

Resultado. Distancia recorrida $149.5 + 0.21 \approx 150$ m (avanza 149.5 m, queda en reposo 1.8 s y retrocede 0.21 m).

Ejercicio 3.5.7 · Arranque con fricción estática y tiempo de paro

Adaptado de: 1er final 2012-1, versión B, problema 3

Un cuerpo de 100 N reposa sobre una superficie horizontal con $\mu_s = 0.25$ y $\mu_k = 0.2$. Se le aplica una fuerza horizontal F que crece linealmente de cero a 250 N en los primeros 5 s, se mantiene en 250 N hasta $t = 10$ s y luego deja de actuar. Obtenga el instante en que el cuerpo se detiene.



Datos. $W = 100\,\text{N}$, $g = 9.81\,\text{m/s}^2$, $m = 10.19\,\text{kg}$; fricción estática máxima $0.25(100) = 25\,\text{N}$; fricción cinética $0.2(100) = 20\,\text{N}$; $F = 50t$ $(0 \le t \le 5)$, $F = 250$ $(5 < t \le 10)$, $F = 0$ después.

Planteamiento. El cuerpo arranca cuando F alcanza la fricción estática máxima; desde ese instante actúa la fricción cinética. Impulso y cantidad de movimiento del arranque al paro: $0 + \int F\,dt - 20\,\Delta t_{\text{total}} = 0$.

Resolución.

1. Arranque: $50\,t_0 = 25$, de donde $t_0 = 0.5\,\text{s}$. En ese instante la fuerza neta salta de 0 a $25 - 20 = 5\,\text{N}$.
2. Impulso de F de 0.5 s a 10 s: $25(5^2 - 0.5^2) + 250(5) = 618.8 + 1250 = 1868.8\,\text{N s}$.
3. Impulso de la fricción en ese lapso: $-20(9.5) = -190\,\text{N s}$; así, $mv_{10} = 1678.8\,\text{N s}$.
4. Después de 10 s solo actúa la fricción: $1678.8 - 20\,\Delta t = 0$, de donde $\Delta t = 83.9\,\text{s}$.

Resultado. Se detiene en $t = 10 + 83.9 = 93.9\,\text{s}$.

Ejercicio 3.5.8 · Choque de dos carros de tren con pérdida de energía

Adaptado de: 1er final 2018-2, turno vespertino, problema 3

En una vía horizontal recta hay dos carros de tren iguales. El carro A, que se mueve a 1.5 m/s, alcanza al carro B, que está en reposo y sin frenos. Si en el impacto se pierde el 15 % de la energía cinética original, calcule la velocidad de cada carro después del impacto.

Datos. $m_A = m_B = m$; $v_A = 1.5\,\text{m/s}$, $v_B = 0$; $T_{\text{después}} = 0.85\,T_{\text{antes}}$.

Planteamiento. Eje x en el sentido de A. Cantidad de movimiento del sistema durante el choque y la condición de energía.

Resolución.

1. Cantidad de movimiento: $m(1.5) = mv'_A + mv'_B$, así que $v'_A = 1.5 - v'_B$.
2. Energía: $\frac{1}{2}m(v'^2_A + v'^2_B) = 0.85 \cdot \frac{1}{2}m(1.5^2)$, es decir, $v'^2_A + v'^2_B = 1.9125$.
3. Sustituyendo: $2v'^2_B - 3v'_B + 0.3375 = 0$, de donde $v'_B = 1.377$ o 0.1225.
4. B va adelante y no puede quedar más lento que A: $v'_B = 1.377\,\text{m/s}$ y $v'_A = 0.123\,\text{m/s}$.
5. Coeficiente de restitución: $e = (1.377 - 0.123)/1.5 = 0.837$.

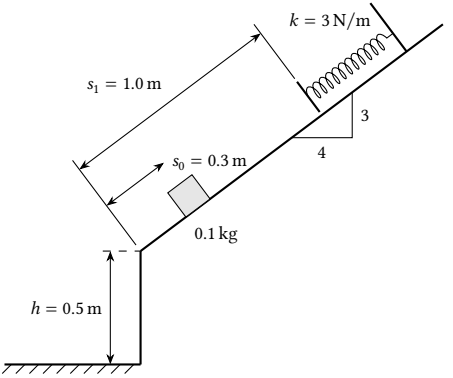
Resultado. $v'_A = 0.123\,\text{m/s}$ y $v'_B = 1.377\,\text{m/s}$, ambos en el sentido original ($e = 0.837$).

3.6 Ejercicios propuestos

Ejercicio propuesto 3.6.1 · Cuerpo que sube por un plano, comprime un resorte y cae al suelo

Adaptado de: 1er final 2018-2, turno matutino, problema 3

Un cuerpo de 0.1 kg sube por un plano inclinado liso de pendiente 3:4 (3 vertical por 4 horizontal) con rapidez v_0, partiendo de la posición $s_0 = 0.3\,\text{m}$, medida a lo largo del plano desde su borde inferior. En $s_1 = 1.0\,\text{m}$ choca con un resorte de constante $k = 3\,\text{N/m}$ y lo comprime como máximo 0.1 m. El borde inferior del plano está a $h = 0.5\,\text{m}$ sobre el suelo. Determine: a) la rapidez inicial v_0; b) la rapidez con la que el cuerpo llega al suelo después de regresar.



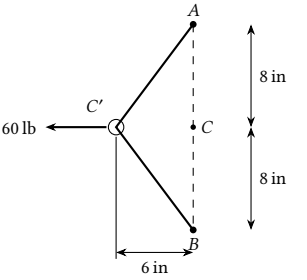
Resultado: a) $v_0 = 3.12\,\text{m/s}$; b) $v = 4.80\,\text{m/s}$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 100.

Ejercicio propuesto 3.6.2 · Pelotita lanzada por una cuerda elástica

Adaptado de: 2º final 2009-2, versión A, problema 3

Una cuerda elástica está estirada entre los puntos A y B, separados 16 in en un mismo plano horizontal; así, su tensión es de 10 lb. Se tira del punto medio de la cuerda hasta llevarlo a C', a 6 in de su posición original C, perpendicularmente a AB; para mantenerlo ahí se requiere una fuerza de 60 lb. Se coloca en C' una pelotita de 0.2 lb y se suelta la cuerda. Determine la rapidez de la pelotita al pasar por C.



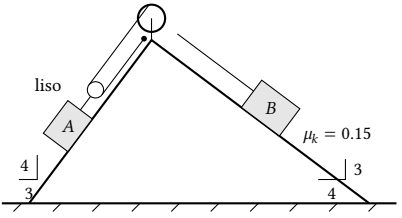
Resultado: $v = 56.7\,\text{ft/s}$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 101.

Ejercicio propuesto 3.6.3 · Dos cuerpos en planos opuestos con polea móvil

Adaptado de: 1er final 2018-1, turno vespertino, problema 2

Los cuerpos A (20 kg) y B (40 kg) están sobre los dos lados de una cuña fija. A está en el lado izquierdo, liso y de pendiente 4:3 (4 vertical por 3 horizontal), y lleva una polea; una cuerda fija cerca de la cima baja paralela al plano, rodea la polea de A, sube a una polea en la cima y baja paralela al lado derecho hasta B. El lado derecho tiene pendiente 3:4 y coeficiente de fricción cinética 0.15 con B. Si el sistema parte del reposo, determine las rapideces de los cuerpos cuando B ha recorrido 2 m.



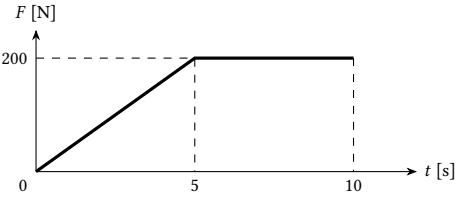
Resultado: $v_B = 3.13\,\text{m/s}$ (baja); $v_A = 1.56\,\text{m/s}$ (sube).

→ Resolución en el Apéndice E, p. 101.

Ejercicio propuesto 3.6.4 · Fuerza en rampa que vence la fricción

Adaptado de: 2º final 2010-1, versión B, problema 3

A un cuerpo de 20 kg, en reposo sobre un plano horizontal, se le aplica una fuerza horizontal F que crece linealmente de cero a 200 N en 5 s y luego se mantiene en 200 N. El coeficiente de fricción es $\mu = 0.6$ (el mismo para el caso estático y el cinético). Determine la velocidad del cuerpo en $t = 10$ s.



Resultado: $v_{10} = 24.8\,\text{m/s}$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 101.

Ejercicio propuesto 3.6.5 · Fuerza promedio a partir del cambio de cantidad de movimiento

Adaptado de: 1er final 2009-2, versión B, problema 3

Un objeto de 10 kg, inicialmente en reposo, recibe un incremento de cantidad de movimiento $\Delta(m\vec{v}) = 30\hat{\imath} + 12\hat{\jmath}$ [kg·m/s] por la acción de una fuerza impulsiva $\vec{F}$ que actúa durante 5 s. Estime la magnitud promedio de $\vec{F}$ y la velocidad del objeto al final de los 5 s.

Resultado: $|\vec{F}_{\text{prom}}| = 6.46\,\text{N}$; $\vec{v} = 3\hat{\imath} + 1.2\hat{\jmath}$ [m/s] ($|\vec{v}| = 3.23\,\text{m/s}$).

→ Resolución en el Apéndice E, p. 102.

Ejercicio propuesto 3.6.6 · Bala que atraviesa un bloque sobre piso rugoso

Adaptado de: 1er final 2014-2, versión D, problema 3

Una bala de 20 g viaja horizontalmente a 400 m/s y choca contra un cuerpo A de 1 kg en reposo sobre una superficie rugosa ($\mu = 0.1$). Después de atravesar el cuerpo, la bala sigue a 150 m/s. Determine la distancia que recorre el cuerpo después del choque hasta detenerse.

Resultado: $d = 12.7\,\text{m}$ ($v'_A = 5\,\text{m/s}$ justo después del choque).

→ Resolución en el Apéndice E, p. 102.

3.7 Errores frecuentes

- Usar la longitud del resorte en lugar de su deformación en $V_e = \frac{1}{2}kx^2$.
- Restar la energía del resorte cuando este la devuelve: si el resorte pasa de comprimido a libre, ΔV_e es negativo y esa energía se **suma** a la cinética.
- Tomar el desplazamiento en lugar de la distancia recorrida en el trabajo de la fricción (la ida y la vuelta sobre el resorte cuentan las dos).
- Usar la misma normal en tramos con distinta pendiente, o el mismo μ en tramos distintos.
- Contar el impulso de la fuerza desde $t = 0$ aunque el cuerpo no se mueva: el impulso neto empieza en el instante en que $F = \mu_s N$.
- Seguir aplicando la fricción cinética después de que el cuerpo se detiene: hay que revisar si la fuerza vence de nuevo a la fricción estática.
- En cuerpos conectados, olvidar la relación de rapideces de la polea móvil ($v_B = 2v_A$) o la energía cinética de uno de los cuerpos.

- En un choque, elegir la raíz que deja al cuerpo de atrás más rápido que el de adelante.
- Mezclar unidades: en el sistema cegesimal, dina, g y cm/s² ($g = 981\ \text{cm/s}^2$); en el inglés, slug = lb/32.2.

3.8 Formulario de emergencia de la unidad

Concepto	Expresión
Trabajo	$U = \int \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r}$; fuerza constante: $Fd\cos\theta$
Fricción	$U = -\mu_k N d$
Energías	$T = \frac{1}{2}mv^2$, $V_g = mgh$, $V_e = \frac{1}{2}kx^2$
Trabajo y energía	$U_{1\to 2} = \Delta T + \Delta V_g + \Delta V_e$
Conservación	$T_A + V_A = T_B + V_B$ si $U_{1\to 2} = 0$
Rizo	$a_n = v^2/\rho$; en la cima, $v^2 \geq g\rho$
Potencia	$P = \vec{F} \cdot \vec{v}$; 1 hp = 550 ft·lb/s = 746 W
Impulso	$m\vec{v}_1 + \int \sum \vec{F}\,\mathrm{d}t = m\vec{v}_2$; área bajo F-t
Arranque	$F(t_0) = \mu_s N$; después, fricción $\mu_k N$
Fuerza promedio	$\vec{F}_{\text{prom}} = \Delta(m\vec{v})/\Delta t$
Choque	$m_A v_A + m_B v_B = m_A v'_A + m_B v'_B$
Restitución	$e = (v'_B - v'_A)/(v_A - v_B)$

3.9 Procedimiento recomendado en el examen

1. Decide el método: distancias, energía; tiempos o gráfica F-t, impulso; choque, cantidad de movimiento.
2. Dibuja la figura con los estados numerados (o los instantes clave) y el DCL de cada tramo.
3. Escribe la ecuación general ($U_{1\to 2} = \Delta T + \Delta V_g + \Delta V_e$ o $mv_1 + \int F\,\mathrm{d}t = mv_2$) antes de sustituir.
4. Con fricción, revisa arranque y paro: ¿vence F a $\mu_s N$? ¿regresa el cuerpo?
5. Comprueba signos y unidades, y escribe el resultado con su sentido.

Unidad 4 · Cinemática del cuerpo rígido: rotación, rodadura y mecanismos

Objetivo (programa de la asignatura). El alumno analizará y resolverá ejercicios de movimiento plano de cuerpos rígidos, y de algunos mecanismos donde no intervengan las causas que modifican dicho movimiento.

Instrucciones de emergencia

- **Frecuencia:** aparece en 18 de los 27 exámenes de 2007-2 a 2018-2 (las versiones de un mismo examen cuentan como uno). Los exámenes de tres problemas (2007-2 a 2009-1) no la incluían; desde 2009-2 aparece en 18 de 20, y en los 8 exámenes desde 2014. Suele ser el problema 3.
- **Tiempo:** de 4 a 5 horas para esta unidad.
- **Ruta corta:**
  1. Lee la sección 4.1 y la tabla de la 4.2 (30 min).
  2. Sigue el ejemplo 4.4 tapando la resolución.
  3. Resuelve los ejercicios 4.5 con cronómetro (20 min cada uno).

4.1 Conceptos y expresiones

4.1.1 Tipos de movimiento plano

Un cuerpo rígido se mueve en un plano de tres maneras:

- **Traslación:** toda recta del cuerpo conserva su dirección; todos los puntos tienen la misma velocidad y la misma aceleración ($\omega = 0$).
- **Rotación alrededor de un eje fijo:** un punto O del cuerpo no se mueve y los demás describen circunferencias con centro en O (poleas, engranes, manivelas).
- **Movimiento plano general:** traslación más rotación (bielas, barras con extremos guiados, ruedas que ruedan).

En los tres casos, **todas las rectas del cuerpo giran el mismo ángulo**: ω y α son del cuerpo, no de un punto. En el plano, $\vec{\omega} = \omega\hat{k}$ y $\vec{\alpha} = \alpha\hat{k}$, con $\hat{k}$ saliendo del papel: positivo es antihorario.

4.1.2 Rotación alrededor de un eje fijo

Las relaciones angulares son las del movimiento rectilíneo de la Unidad 1, con θ en radianes:

$$\omega = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}, \qquad \alpha = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = \omega\,\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}\theta}.$$

Con α constante: $\omega = \omega_0 + \alpha t$, $\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \tfrac{1}{2}\alpha t^2$, $\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha(\theta - \theta_0)$. Una revolución son 2π rad.

Un punto P a la distancia r del eje tiene

$$v = \omega r, \qquad a_t = \alpha r, \qquad a_n = \omega^2 r = \frac{v^2}{r}, \qquad a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2},$$

con a_t tangente a la circunferencia y a_n dirigida hacia el eje. En forma vectorial, con $\vec{r}$ del eje a P:

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}, \qquad \vec{a} = \vec{\alpha} \times \vec{r} - \omega^2 \vec{r}.$$

Regla de cálculo: $\omega\hat{k} \times (x\hat{\imath} + y\hat{\jmath}) = \omega(-y\hat{\imath} + x\hat{\jmath})$.

4.1.3 Transmisión: poleas, engranes, bandas y cremallera

Dos cuerpos que se transmiten el movimiento sin deslizar tienen **la misma rapidez en el punto de contacto** y la misma aceleración tangencial:

$$\omega_A r_A = \omega_B r_B, \qquad \alpha_A r_A = \alpha_B r_B, \qquad \theta_A r_A = \theta_B r_B.$$

- Engranes o ruedas en contacto exterior: giran en sentidos opuestos. Unidos por una banda abierta: mismo sentido.
- Un tramo recto de banda o de cuerda se traslada con $v = \omega r$ y $a = \alpha r$ (sin componente normal); el punto de la banda que va sobre la polea sí tiene $a_n = v^2/r$.
- Una polea con dos radios (borde interno fijo al externo) tiene una sola ω; cada cuerda se mueve con su propio radio.
- Cremallera: es un cuerpo rígido; su punto de contacto tiene la velocidad del diente del engrane.

4.1.4 Velocidades en movimiento plano general

Para dos puntos A y B del mismo cuerpo:

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{\omega} \times \vec{r}_{B/A}, \qquad |\vec{v}_{B/A}| = \omega\, r_{B/A}, \;\; \vec{v}_{B/A} \perp \vec{r}_{B/A}.$$

Centro instantáneo de rotación (CIR). Es el punto I, del cuerpo o de su extensión, con velocidad nula en ese instante. Se halla trazando las perpendiculares a las velocidades de dos puntos; donde se cortan está I. Entonces

$$v_P = \omega\, r_{P/I} \quad \text{para todo punto } P,$$

y la velocidad de P es perpendicular a IP. Si las perpendiculares son paralelas (velocidades paralelas y del mismo tamaño), el cuerpo se traslada en ese instante y $\omega = 0$. El CIR **no** sirve para aceleraciones: su aceleración no es cero.

4.1.5 Rodadura sin deslizar

Una rueda de radio r que rueda sin deslizar sobre una superficie fija tiene su CIR en el punto de contacto:

$$v_G = \omega r, \qquad a_G = \alpha r.$$

El punto de contacto tiene $v = 0$; el punto más alto, $v = 2v_G$. La aceleración del punto de contacto no es cero: vale $\omega^2 r$ hacia el centro.

4.1.6 Aceleraciones relativas

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{\alpha} \times \vec{r}_{B/A} - \omega^2 \vec{r}_{B/A}.$$

El término $\vec{\alpha} \times \vec{r}_{B/A}$ es la componente tangencial de $\vec{a}_{B/A}$ (perpendicular a la barra) y $-\omega^2 \vec{r}_{B/A}$, la normal (de B hacia A). Las ω se calculan primero, con velocidades.

4.1.7 Mecanismos

- **Manivela-biela-corredera:** la manivela OA gira alrededor de O; la biela AB tiene movimiento plano general; la corredera (o collarín) B se traslada sobre su guía, así que $\vec{v}_B$ y $\vec{a}_B$ tienen la dirección de la guía.
- **Cuatro articulaciones:** barras AB y CD que giran alrededor de los apoyos fijos A y D, unidas por la barra BC. Se cumple $\vec{v}_C = \vec{\omega}_{CD} \times \vec{r}_{C/D}$ y también $\vec{v}_C = \vec{v}_B + \vec{\omega}_{BC} \times \vec{r}_{C/B}$.
- **Barra con extremos guiados:** cada extremo se mueve sobre su guía (ranura recta o circular, piso, pared); la dirección de su velocidad es la de la guía.

4.1.8 Movimiento relativo respecto a un sistema que gira

El programa llama a este tema **movimiento relativo** (el caso de dos partículas en traslación, como dos automóviles, está en la Unidad 1). Si un collarín P se desliza con $\vec{v}_{\text{rel}}$ y $\vec{a}_{\text{rel}}$ a lo largo de una barra que gira alrededor de un punto fijo O con ω y α:

$$\vec{v}_P = \vec{\omega} \times \vec{r}_{P/O} + \vec{v}_{\text{rel}},$$
$$\vec{a}_P = \vec{\alpha} \times \vec{r}_{P/O} - \omega^2 \vec{r}_{P/O} + 2\vec{\omega} \times \vec{v}_{\text{rel}} + \vec{a}_{\text{rel}}.$$

El término $2\vec{\omega} \times \vec{v}_{\text{rel}}$ es la aceleración de Coriolis. En los finales de 2007-2 a 2018-2 no apareció un collarín sobre una barra que gira; los collarines de esos exámenes se deslizan sobre guías fijas y se resuelven con 4.3.4 y 4.3.5.

4.2 Cómo reconocer el problema

Si el enunciado dice…	Se trata de…	Proced.
$\alpha = f(t)$, «un motor proporciona una aceleración angular»	rotación con $\alpha(t)$: integrar en t	4.3.1
$\alpha = f(\theta)$, «cuando ha girado n revoluciones»	$\alpha = \omega\, \mathrm{d}\omega/\mathrm{d}\theta$	4.3.1
$\alpha = f(\omega)$	separar $\mathrm{d}\omega/f(\omega)$	4.3.1
«banda», «engrane», «polea doble», «cremallera», «no deslizan entre sí»	misma rapidez en el contacto	4.3.2
«rueda sin deslizar», bicicleta, cilindro que rueda	CIR en el contacto, $v_G = \omega r$	4.3.3
«manivela», «biela», «deslizador», «collarín», «guía»	manivela-biela-corredera	4.3.4 y 4.3.6
«mecanismo de cuatro articulaciones», «barras AB, BC, CD»	cuatro articulaciones	4.3.4 a 4.3.6
«los extremos se mueven en ranuras», «se apoya en el piso y en la pared»	barra con extremos guiados	4.3.4 y 4.3.5
piden solo velocidades y la geometría es sencilla	CIR	4.3.4
piden aceleraciones angulares o de un punto	aceleraciones relativas	4.3.5
«collarín que se desliza a lo largo de una barra que gira»	movimiento relativo, sistema que gira	4.3.7

4.3 Procedimientos

4.3.1 Rotación con $\alpha(t)$, $\alpha(\theta)$ o $\alpha(\omega)$

1. Identifica de qué depende α y escoge la relación:
   - $\alpha(t)$: $\omega = \omega_0 + \int_0^t \alpha\,\mathrm{d}t$ y $\theta = \int_0^t \omega\,\mathrm{d}t$.
   - $\alpha(\theta)$: $\int_{\omega_0}^{\omega} \omega\,\mathrm{d}\omega = \int_0^{\theta} \alpha\,\mathrm{d}\theta$.
   - $\alpha(\omega)$: $\int_{\omega_0}^{\omega} \frac{\omega\,\mathrm{d}\omega}{\alpha(\omega)} = \theta$ (si piden un ángulo) o $\int_{\omega_0}^{\omega} \frac{\mathrm{d}\omega}{\alpha(\omega)} = t$ (si piden un tiempo).
2. Pasa revoluciones a radianes ($\frac{1}{2}$ rev $= \pi$ rad).
3. Evalúa ω y α en el instante pedido.
4. Para un punto a la distancia r: $a_t = \alpha r$, $a_n = \omega^2 r$, $a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2}$.

4.3.2 Transmisión entre poleas, engranes, bandas y cremallera

1. Marca cada contacto (diente con diente, banda con polea, cuerda con tambor) y su radio.
2. En cada contacto: $\omega_1 r_1 = \omega_2 r_2$ (y lo mismo con α y con θ).
3. Dentro de un mismo cuerpo (polea con dos radios), ω es la misma.
4. Un bloque colgado de una cuerda enrollada en un radio r: $s = r\theta$, $v = \omega r$, $a = \alpha r$.
5. Sentidos: contacto exterior invierte el sentido; banda abierta lo conserva.

4.3.3 Rodadura sin deslizar

1. Pon el CIR en el punto de contacto con la superficie fija.
2. $\omega = v_G / r$ (radio, no diámetro).
3. Velocidad de cualquier punto: $v_P = \omega\, r_{P/I}$, perpendicular a IP; o bien $\vec{v}_P = \vec{v}_G + \vec{\omega} \times \vec{r}_{P/G}$.
4. Si hay aceleración: $a_G = \alpha r$ y $\vec{a}_P = \vec{a}_G + \vec{\alpha} \times \vec{r}_{P/G} - \omega^2 \vec{r}_{P/G}$.

4.3.4 Velocidades: método vectorial y CIR

1. Escribe las coordenadas de cada articulación con la figura (longitud por coseno y seno de su ángulo) y los vectores $\vec{r}_{B/A}$ de cada barra.
2. Empieza por el cuerpo cuyo movimiento se conoce (manivela: $\vec{v}_B = \vec{\omega}_{AB} \times \vec{r}_{B/A}$).
3. Para el siguiente punto, iguala dos expresiones de su velocidad: la que viene por la barra ($\vec{v}_A + \vec{\omega} \times \vec{r}$) y la que impone su apoyo (dirección de la guía, o giro alrededor de un apoyo fijo).
4. Separa componentes $\hat{\imath}$ y $\hat{\jmath}$: dos ecuaciones, dos incógnitas.
5. **Con CIR:** traza las perpendiculares a dos velocidades conocidas en dirección; su cruce es I. Calcula las distancias (con triángulos rectángulos o ley de senos), $\omega = v_A / r_{A/I}$ y $v_B = \omega\, r_{B/I}$.
6. Signo de ω: positivo es antihorario. Da magnitud y sentido.

4.3.5 Aceleraciones relativas

1. Resuelve antes todas las velocidades angulares (4.3.4).
2. Aceleración del punto conocido: en la manivela con ω constante, $\vec{a}_B = -\omega_{AB}^2 \vec{r}_{B/A}$.
3. Para el siguiente punto: $\vec{a}_C = \vec{a}_B + \alpha_{BC}\hat{k} \times \vec{r}_{C/B} - \omega_{BC}^2 \vec{r}_{C/B}$, igualada con lo que impone su apoyo: $\alpha_{CD}\hat{k} \times \vec{r}_{C/D} - \omega_{CD}^2 \vec{r}_{C/D}$ si gira alrededor de D, o a_C en la dirección de la guía

si se desliza.
4. Separa componentes; las incógnitas son las α (o una α y la magnitud de a_C).

4.3.6 Mecanismos: corredera, cuatro articulaciones y extremos guiados

1. Clasifica cada cuerpo: gira alrededor de un punto fijo, se traslada sobre una guía o tiene movimiento plano general.
2. Dibuja el mecanismo con cotas exactas; si falta un dato geométrico, sácalo del triángulo (por ejemplo, el ángulo de una biela con $\sin\beta = h/L$).
3. Velocidades con 4.3.4 y aceleraciones con 4.3.5, barra por barra desde la que tiene el dato.
4. Revisa con el CIR: la velocidad de cada punto debe ser perpendicular a la recta que lo une con el CIR de su barra.

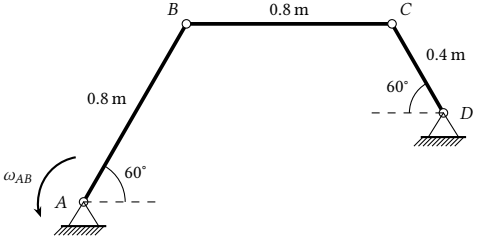
4.3.7 Collarín sobre una barra que gira

1. Toma ejes que giran con la barra: $\hat{e}_r$ a lo largo de la barra y $\hat{e}_\theta$ perpendicular.
2. El movimiento del collarín respecto a la barra da $\vec{v}_{\text{rel}} = \dot{r}\,\hat{e}_r$ y $\vec{a}_{\text{rel}} = \ddot{r}\,\hat{e}_r$.
3. Suma los términos de 4.1.8: arrastre ($\vec{\omega}\times\vec{r}$, $\vec{\alpha}\times\vec{r} - \omega^2\vec{r}$), relativo y Coriolis $2\vec{\omega}\times\vec{v}_{\text{rel}}$.

4.4 Ejemplo resuelto

Ejemplo resuelto · Cuatro articulaciones con manivela a velocidad constante

Adaptado del 1er final 2018-1, turno matutino, problema 3.
En el mecanismo de cuatro articulaciones de la figura, la barra AB (0.8 m, a 60° sobre la horizontal) gira con velocidad angular constante de 10 rad/s en sentido antihorario. La barra BC (0.8 m) está horizontal y la barra CD (0.4 m) forma 60° con la horizontal, con C arriba y a la izquierda del apoyo D. Para la posición mostrada, determine la magnitud y el sentido de: a) las velocidades angulares de BC y CD; b) las aceleraciones angulares de BC y CD.



Datos. $\omega_{AB} = 10\,\text{rad/s}$ (antihorario), $\alpha_{AB} = 0$. Con origen en A:

$$\vec{r}_{B/A} = 0.4\hat{\imath} + 0.6928\hat{\jmath}, \quad \vec{r}_{C/B} = 0.8\hat{\imath}, \quad \vec{r}_{C/D} = -0.2\hat{\imath} + 0.3464\hat{\jmath}\ \ [\text{m}].$$

Planteamiento. AB y CD giran alrededor de apoyos fijos; BC tiene movimiento plano general. Se iguala la velocidad (y luego la aceleración) de C calculada por B y por D.

Resolución. a) Velocidades:

$$\vec{v}_B = 10\hat{k} \times (0.4\hat{\imath} + 0.6928\hat{\jmath}) = -6.928\hat{\imath} + 4\hat{\jmath},$$
$$\vec{v}_C = \vec{v}_B + \omega_{BC}\hat{k} \times 0.8\hat{\imath} = -6.928\hat{\imath} + (4 + 0.8\,\omega_{BC})\hat{\jmath},$$
$$\vec{v}_C = \omega_{CD}\hat{k} \times (-0.2\hat{\imath} + 0.3464\hat{\jmath}) = -0.3464\,\omega_{CD}\hat{\imath} - 0.2\,\omega_{CD}\hat{\jmath}.$$

Componente $\hat{\imath}$: $-6.928 = -0.3464\,\omega_{CD}$, de donde $\omega_{CD} = 20\,\text{rad/s}$. Componente $\hat{\jmath}$: $4 + 0.8\,\omega_{BC} = -0.2(20) = -4$, de donde $\omega_{BC} = -10\,\text{rad/s}$.
Comprobación con el CIR de BC: las rectas AB y DC se cortan a $0.8\,\text{m}$ de B, y $\omega_{BC} = v_B/0.8 = 8/0.8 = 10\,\text{rad/s}$.
b) Aceleraciones. Como $\alpha_{AB} = 0$:

$$\vec{a}_B = -\omega_{AB}^2\vec{r}_{B/A} = -40\hat{\imath} - 69.28\hat{\jmath},$$
$$\vec{a}_C = \vec{a}_B + \alpha_{BC}\hat{k} \times 0.8\hat{\imath} - (10)^2(0.8\hat{\imath})$$
$$= -120\hat{\imath} + (-69.28 + 0.8\,\alpha_{BC})\hat{\jmath},$$
$$\vec{a}_C = \alpha_{CD}\hat{k} \times \vec{r}_{C/D} - (20)^2\vec{r}_{C/D}$$
$$= (80 - 0.3464\,\alpha_{CD})\hat{\imath} + (-138.56 - 0.2\,\alpha_{CD})\hat{\jmath}.$$

Componente $\hat{\imath}$: $-120 = 80 - 0.3464\,\alpha_{CD}$, así que $\alpha_{CD} = 577.4\,\text{rad/s}^2$. Componente $\hat{\jmath}$: $-69.28 + 0.8\,\alpha_{BC} = -138.56 - 0.2(577.4)$, así que $\alpha_{BC} = -230.9\,\text{rad/s}^2$.
Resultado. a) $\omega_{BC} = 10\,\text{rad/s}$ **horario**; $\omega_{CD} = 20\,\text{rad/s}$ **antihorario**. b) $\alpha_{BC} = 230.9\,\text{rad/s}^2$ **horario**; $\alpha_{CD} = 577.4\,\text{rad/s}^2$ **antihorario**.

4.5 Ejercicios de examen resueltos

Ejercicio 4.5.1 · Placa con aceleración angular senoidal

Adaptado de: 2º final 2015-2, problema 3

Una placa circular de 250 mm de radio gira alrededor de un eje fijo por su centro. Parte del reposo y su aceleración angular es $\alpha = \alpha_0 \cos(\pi t/T)$, con $\alpha_0 = 10\,\text{rad/s}^2$ y $T = 1.5\,\text{s}$. Determine la magnitud de la aceleración de un punto A del perímetro cuando $t = 0.5\,\text{s}$.

Datos. $r = 0.25\,\text{m}$, $\omega_0 = 0$, $\alpha_0 = 10\,\text{rad/s}^2$, $T = 1.5\,\text{s}$, $t = 0.5\,\text{s}$.

Planteamiento. Rotación con $\alpha(t)$: se integra para obtener $\omega(t)$; después $a_t = \alpha r$ y $a_n = \omega^2 r$.

Resolución.

$$\omega = \int_0^t \alpha_0 \cos\frac{\pi t}{T}\,\mathrm{d}t = \frac{\alpha_0 T}{\pi}\sin\frac{\pi t}{T}.$$

En $t = 0.5$ s, $\pi t/T = \pi/3$:

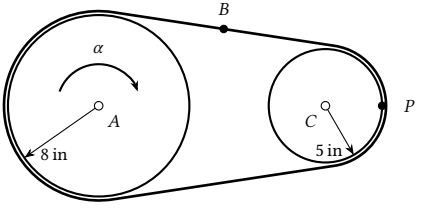
$$\omega = \frac{10(1.5)}{\pi}\sin 60^\circ = 4.135\ \text{rad/s}, \qquad \alpha = 10\cos 60^\circ = 5\ \text{rad/s}^2,$$
$$a_t = \alpha r = 5(0.25) = 1.25\ \text{m/s}^2,$$
$$a_n = \omega^2 r = (4.135)^2(0.25) = 4.274\ \text{m/s}^2,$$
$$a = \sqrt{1.25^2 + 4.274^2}.$$

Resultado. $a_A = 4.45\ \text{m/s}^2$.

Ejercicio 4.5.2 · Banda con aceleración angular que depende de ω

Adaptado de: 1er final 2015-2, versión B, problema 3

Una banda se mueve sin deslizar sobre dos poleas: A, de 8 in de radio, y C, de 5 in. La polea A parte del reposo y gira en sentido horario con aceleración angular $\alpha = 120 - 0.002\,\omega^2$ (α en rad/s^2, ω en rad/s). Después de media revolución de A, determine la magnitud de la aceleración: a) del punto B, sobre el tramo recto superior de la banda; b) del punto P, sobre el borde de la polea C.



Datos. $r_A = 8$ in, $r_C = 5$ in, $\omega_0 = 0$, $\theta = \pi$ rad.

Planteamiento. $\alpha(\omega)$ y se pide un ángulo: $\alpha = \omega\,\mathrm{d}\omega/\mathrm{d}\theta$. La banda transmite v y a_t: $\omega_A r_A = \omega_C r_C$ y $\alpha_A r_A = \alpha_C r_C$.

Resolución.

$$\int_0^{\omega} \frac{\omega\,\mathrm{d}\omega}{120 - 0.002\,\omega^2} = \int_0^{\theta} \mathrm{d}\theta \;\Rightarrow\; -\frac{1}{0.004}\ln\frac{120 - 0.002\,\omega^2}{120} = \theta.$$

Despejando, $\omega^2 = 60\,000\,(1 - e^{-0.004\theta})$. Con $\theta = \pi$:

$$\omega_A = 27.37\ \text{rad/s}, \qquad \alpha_A = 120 - 0.002(27.37)^2 = 118.5\ \text{rad/s}^2.$$

a) El tramo recto se traslada: no tiene componente normal, $a_B = \alpha_A r_A = 118.5(8) = 948\ \text{in/s}^2$.

b) En la polea C:

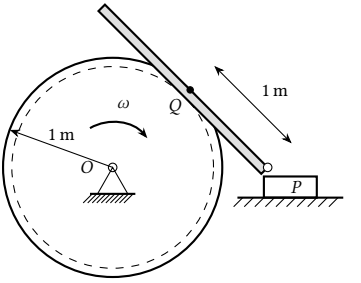
$$\omega_C = \frac{27.37(8)}{5} = 43.80\ \text{rad/s}, \qquad \alpha_C = \frac{118.5(8)}{5} = 189.6\ \text{rad/s}^2,$$
$$a_t = \alpha_C r_C = 948\ \text{in/s}^2, \qquad a_n = \omega_C^2 r_C = (43.80)^2(5) = 9591\ \text{in/s}^2,$$
$$a_P = \sqrt{948^2 + 9591^2}.$$

Resultado. a) $a_B = 948\,\text{in/s}^2$; b) $a_P = 9637\,\text{in/s}^2$ (casi toda normal).

Ejercicio 4.5.3 · Cremallera sobre un engrane

Adaptado de: 1er final 2011-2, versión C, problema 3

Una cremallera recta descansa sobre un engrane de 1 m de radio que gira alrededor de su centro fijo O. La cremallera toca al engrane en Q, a 45° sobre la horizontal por O, y está articulada a un deslizador P que se mueve sobre un piso horizontal; P está a la altura de O y a 1 m de Q a lo largo de la cremallera. En el instante mostrado el engrane gira a 15 rad/s en sentido horario. Determine: a) la velocidad angular de la cremallera; b) la velocidad del deslizador.



Datos. $r = 1\,\text{m}$, $\omega_{\text{eng}} = 15\,\text{rad/s}$ (horario), $QP = 1\,\text{m}$ a 45° bajo la horizontal.

Planteamiento. En el contacto, el punto Q de la cremallera tiene la velocidad del diente: $v_Q = \omega r$, a lo largo de la cremallera. P se mueve horizontalmente. Se usa el CIR de la cremallera.

Resolución. $v_Q = 15(1) = 15\,\text{m/s}$, hacia abajo y a la derecha a lo largo de la cremallera. La perpendicular a $\vec{v}_Q$ por Q es la recta OQ; la perpendicular a $\vec{v}_P$ por P es la vertical por P. Con origen en O, $Q = (0.707,\ 0.707)$ y $P = (1.414,\ 0)$; las dos rectas se cortan en $I = (1.414,\ 1.414)$. Entonces

$$r_{Q/I} = 1\,\text{m}, \qquad r_{P/I} = 1.414\,\text{m},$$
$$\omega = \frac{v_Q}{r_{Q/I}} = \frac{15}{1}, \qquad v_P = \omega\, r_{P/I} = 15(1.414).$$

I está arriba de P y P se mueve hacia la derecha, así que la cremallera gira en sentido antihorario.

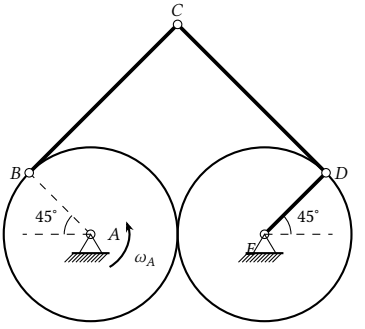
Resultado. a) $\omega = 15\,\text{rad/s}$ **antihorario**; b) $v_P = 21.2\,\text{m/s}$ **hacia la derecha**.

Ejercicio 4.5.4 · Dos discos que no deslizan y dos barras

Adaptado de: 1er final 2015-1, versión A, problema 3

Dos discos de 1 m de radio, con centros fijos A y E a 2 m uno del otro, están en contacto y no deslizan entre sí. El disco A gira con velocidad angular constante de 3 rad/s en sentido antihorario. La barra BC está articulada al disco A en B, sobre su borde a 45° arriba y a la izquierda de A; la barra DC está articulada al disco E en D, sobre su borde a 45° arriba y

a la derecha de E. Las dos barras forman 45° con la horizontal y se unen en C, sobre la vertical del punto de contacto. Determine: a) la velocidad de C; b) la aceleración de C; c) la velocidad y la aceleración de D respecto a B.



Datos. Con origen en A: $B = (-0.707,\ 0.707)$, $E = (2,\ 0)$, $D = (2.707,\ 0.707)$, $C = (1,\ 2.414)$ [m]. $\omega_A = 3\,\text{rad/s}$ antihorario, $\alpha_A = 0$; por el contacto exterior con radios iguales, $\omega_E = 3\,\text{rad/s}$ horario, $\alpha_E = 0$.

Planteamiento. $\vec{r}_{C/B} = 1.707\hat{\imath} + 1.707\hat{\jmath}$, $\vec{r}_{C/D} = -1.707\hat{\imath} + 1.707\hat{\jmath}$. Se iguala $\vec{v}_C$ (y luego $\vec{a}_C$) calculada por B y por D.

Resolución. a) $\vec{v}_B = 3\hat{k} \times (-0.707\hat{\imath} + 0.707\hat{\jmath}) = -2.121\hat{\imath} - 2.121\hat{\jmath}$ y $\vec{v}_D = -3\hat{k} \times (0.707\hat{\imath} + 0.707\hat{\jmath}) = 2.121\hat{\imath} - 2.121\hat{\jmath}$.

$$\begin{aligned}\vec{v}_C &= (-2.121 - 1.707\,\omega_{BC})\hat{\imath} + (-2.121 + 1.707\,\omega_{BC})\hat{\jmath} \\ &= (2.121 - 1.707\,\omega_{CD})\hat{\imath} + (-2.121 - 1.707\,\omega_{CD})\hat{\jmath}.\end{aligned}$$

De $\hat{\jmath}$: $\omega_{CD} = -\omega_{BC}$. De $\hat{\imath}$: $-2.121 - 1.707\,\omega_{BC} = 2.121 + 1.707\,\omega_{BC}$, así que $\omega_{BC} = -1.243\,\text{rad/s}$ y $\omega_{CD} = 1.243\,\text{rad/s}$. Entonces $\vec{v}_C = -4.243\hat{\jmath}$.

b) $\vec{a}_B = -9\vec{r}_{B/A} = 6.364\hat{\imath} - 6.364\hat{\jmath}$, $\vec{a}_D = -9\vec{r}_{D/E} = -6.364\hat{\imath} - 6.364\hat{\jmath}$ y $\omega^2(1.707) = (1.243)^2(1.707) = 2.636$:

$$\begin{aligned}\vec{a}_C &= (3.728 - 1.707\,\alpha_{BC})\hat{\imath} + (-9.000 + 1.707\,\alpha_{BC})\hat{\jmath} \\ &= (-3.728 - 1.707\,\alpha_{CD})\hat{\imath} + (-9.000 - 1.707\,\alpha_{CD})\hat{\jmath}.\end{aligned}$$

De $\hat{\jmath}$: $\alpha_{CD} = -\alpha_{BC}$. De $\hat{\imath}$: $\alpha_{BC} = 7.456/3.414 = 2.184\,\text{rad/s}^2$ (antihorario). Así, $a_{Cx} = 0$ y

$$a_{Cy} = -9.000 + 1.707(2.184) = -5.272\,\text{m/s}^2.$$

c) $\vec{v}_{D/B} = \vec{v}_D - \vec{v}_B = 4.243\hat{\imath}$ y $\vec{a}_{D/B} = \vec{a}_D - \vec{a}_B = -12.73\hat{\imath}$.

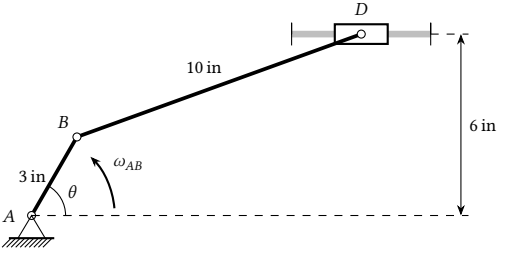
Resultado.

- a) $v_C = 4.24\,\text{m/s}$ **hacia abajo**;
- b) $a_C = 5.27\,\text{m/s}^2$ **hacia abajo**;
- c) $v_{D/B} = 4.24\,\text{m/s}$ **hacia la derecha** y $a_{D/B} = 12.73\,\text{m/s}^2$ **hacia la izquierda**.

Ejercicio 4.5.5 · Manivela, biela y collarín

Adaptado de: 1er final 2013-1, versión B, problema 4

El brazo AB, de 3 in, gira alrededor del apoyo fijo A con velocidad angular constante de 16 rad/s en sentido antihorario. La barra BD, de 10 in, une B con un collarín D que se desliza sobre una varilla horizontal fija situada 6 in arriba de A. Para $\theta = 60°$ (θ es el ángulo de AB con la horizontal), determine la aceleración del collarín D.



Datos. $\omega_{AB} = 16$ rad/s antihorario, $\alpha_{AB} = 0$. $\vec{r}_{B/A} = 1.5\hat{\imath} + 2.598\hat{\jmath}$; la altura de D sobre B es $6 - 2.598 = 3.402$ in, así que $\vec{r}_{D/B} = \sqrt{10^2 - 3.402^2}\,\hat{\imath} + 3.402\hat{\jmath} = 9.404\hat{\imath} + 3.402\hat{\jmath}$ [in].

Planteamiento. Manivela-biela-corredera: $\vec{v}_D$ y $\vec{a}_D$ son horizontales. Primero ω_{BD} con velocidades, luego α_{BD} y a_D con aceleraciones.

Resolución. Velocidades:

$$\vec{v}_B = 16\hat{k} \times (1.5\hat{\imath} + 2.598\hat{\jmath}) = -41.57\hat{\imath} + 24\hat{\jmath},$$
$$\vec{v}_D = (-41.57 - 3.402\,\omega_{BD})\hat{\imath} + (24 + 9.404\,\omega_{BD})\hat{\jmath}.$$

Como $v_{Dy} = 0$: $\omega_{BD} = -2.552$ rad/s (horario) y $v_D = -41.57 + 8.68 = -32.89$ in/s.

Aceleraciones: $\vec{a}_B = -16^2\vec{r}_{B/A} = -384\hat{\imath} - 665.1\hat{\jmath}$ y $\omega_{BD}^2\vec{r}_{D/B} = 6.514\,\vec{r}_{D/B} = 61.25\hat{\imath} + 22.16\hat{\jmath}$:

$$\begin{aligned}\vec{a}_D &= \vec{a}_B + \alpha_{BD}\hat{k} \times \vec{r}_{D/B} - \omega_{BD}^2\vec{r}_{D/B} \\ &= (-445.25 - 3.402\,\alpha_{BD})\hat{\imath} + (-687.27 + 9.404\,\alpha_{BD})\hat{\jmath}.\end{aligned}$$

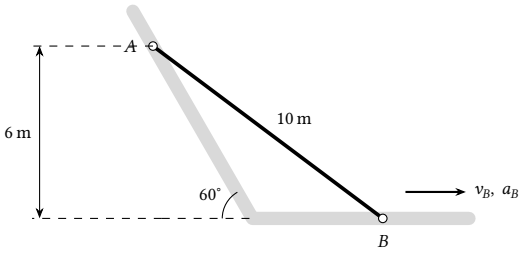
Como $a_{Dy} = 0$: $\alpha_{BD} = 73.08$ rad/s^2 (antihorario) y $a_D = -445.25 - 3.402(73.08) = -693.9$ in/s^2.

Resultado. $a_D = 694$ in/s^2 **hacia la izquierda** (con $v_D = 32.9$ in/s hacia la izquierda, $\omega_{BD} = 2.55$ rad/s horario y $\alpha_{BD} = 73.1$ rad/s^2 antihorario).

Ejercicio 4.5.6 · Barra con extremos en ranuras

Adaptado de: 1er final 2011-2, versión B, problema 3

Los extremos de la barra AB, de 10 m, se mueven en dos ranuras: B en una ranura horizontal y A en una ranura inclinada 60° respecto a la horizontal, que sube hacia la izquierda desde la ranura horizontal. En la posición mostrada, A está 6 m arriba de la ranura horizontal, y B tiene una velocidad de 3 m/s y una aceleración de 2 m/s^2, ambas hacia la derecha. Determine la velocidad y la aceleración de A en ese instante.



Datos. $\vec{r}_{A/B} = -8\hat{\imath} + 6\hat{\jmath}$ [m] (el desplazamiento horizontal es $\sqrt{10^2 - 6^2} = 8$ m); $\vec{v}_B = 3\hat{\imath}$, $\vec{a}_B = 2\hat{\imath}$. La ranura de A tiene dirección $\hat{u} = 0.5\hat{\imath} - 0.866\hat{\jmath}$ (hacia abajo y a la derecha).

Planteamiento. Barra con extremos guiados: $\vec{v}_A = v_A\hat{u}$ y $\vec{a}_A = a_A\hat{u}$, con $\vec{v}_A = \vec{v}_B + \vec{\omega}\times\vec{r}_{A/B}$ y $\vec{a}_A = \vec{a}_B + \vec{\alpha}\times\vec{r}_{A/B} - \omega^2\vec{r}_{A/B}$.

Resolución. Velocidades:

$$0.5\,v_A\hat{\imath} - 0.866\,v_A\hat{\jmath} = (3 - 6\omega)\hat{\imath} - 8\omega\hat{\jmath}.$$

De $\hat{\jmath}$: $v_A = 9.238\,\omega$. De $\hat{\imath}$: $3 - 6\omega = 4.619\,\omega$, así que $\omega = 0.2825$ rad/s (antihorario) y $v_A = 2.610$ m/s.

Aceleraciones, con $\omega^2 = 0.07982$:

$$0.5\,a_A\hat{\imath} - 0.866\,a_A\hat{\jmath} = (2.6385 - 6\alpha)\hat{\imath} + (-0.4789 - 8\alpha)\hat{\jmath}.$$

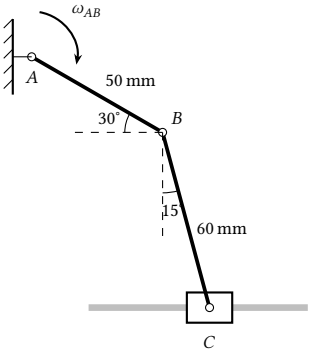
De $\hat{\jmath}$: $a_A = 9.238\,\alpha + 0.553$. De $\hat{\imath}$: $2.6385 - 6\alpha = 4.619\,\alpha + 0.2765$, así que $\alpha = 0.2224$ rad/s^2 (antihorario) y $a_A = 2.608$ m/s^2.

Resultado. $v_A = 2.61$ m/s y $a_A = 2.61$ m/s^2, las dos **a lo largo de la ranura, hacia abajo** (60° bajo la horizontal, hacia la derecha). La coincidencia numérica entre v_A y a_A es casual.

Ejercicio 4.5.7 · Collarín: centro instantáneo con ley de senos

Adaptado de: 2º final 2018-2, problema 3

La varilla AB, de 50 mm, gira alrededor del apoyo fijo A a 2 rad/s en sentido horario; en el instante mostrado forma 30° bajo la horizontal, con B a la derecha de A. La barra BC, de 60 mm, forma 15° con la vertical y baja hacia la derecha hasta el collarín C, que se desliza sobre una varilla horizontal fija. Determine la velocidad del collarín C.



Datos. $\omega_{AB} = 2\,\text{rad/s}$ horario, $AB = 50\,\text{mm}$, $BC = 60\,\text{mm}$.

Planteamiento. $\vec{v}_B \perp AB$ y $\vec{v}_C$ es horizontal. El CIR I de BC está en la recta AB prolongada más allá de B y en la vertical por C.

Resolución. $v_B = \omega_{AB}(AB) = 2(50) = 100\,\text{mm/s}$, perpendicular a AB, hacia abajo y a la izquierda. En el triángulo BCI: el ángulo en C (entre CB y la vertical) es 15°; en B (entre la prolongación de AB, a 30° bajo la horizontal, y BC, a 75° bajo la horizontal) es 45°; en I, 120°. Ley de senos:

$$\frac{60}{\sin 120^\circ} = \frac{r_{B/I}}{\sin 15^\circ} = \frac{r_{C/I}}{\sin 45^\circ} \;\Rightarrow\; r_{B/I} = 17.93\,\text{mm}, \quad r_{C/I} = 48.99\,\text{mm},$$

$$\omega_{BC} = \frac{v_B}{r_{B/I}} = \frac{100}{17.93} = 5.577\,\text{rad/s}, \qquad v_C = \omega_{BC}\, r_{C/I} = 5.577(48.99).$$

B se mueve hacia abajo y a la izquierda alrededor de I, así que BC gira en sentido antihorario y C, que está debajo de I, se mueve hacia la derecha.

Comprobación vectorial: con $\vec{r}_{C/B} = 15.53\hat{\imath} - 57.96\hat{\jmath}$ y $\vec{v}_B = -50\hat{\imath} - 86.60\hat{\jmath}$, la condición $v_{Cy} = -86.60 + 15.53\,\omega_{BC} = 0$ da el mismo ω_{BC}, y $v_C = -50 + 57.96(5.577)$.

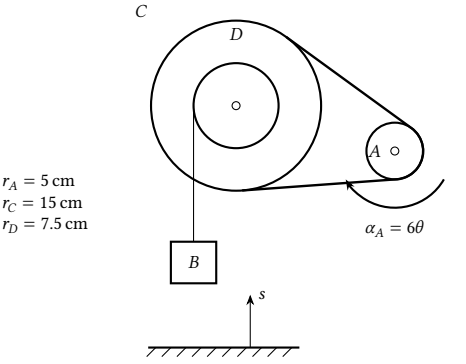
Resultado. $v_C = 273\,\text{mm/s}$ **hacia la derecha** ($\omega_{BC} = 5.58\,\text{rad/s}$ antihorario).

4.6 Ejercicios propuestos

Ejercicio propuesto 4.6.1 · Polea con aceleración angular que depende de θ

Adaptado de: 1er final 2011-1, versión B, problema 3

Una banda une la polea A ($r_A = 5\,\text{cm}$) con el borde exterior de la polea C ($r_C = 15\,\text{cm}$). La polea C tiene un borde interno D ($r_D = 7.5\,\text{cm}$), fijo a ella, en el que se enrolla la cuerda de la que cuelga el bloque B. Inicialmente todo está en reposo y $s = 0$; entonces la polea A adquiere una aceleración angular $\alpha_A = 6\theta$ (θ en radianes, α en rad/s^2). Determine la rapidez del bloque B cuando se ha elevado 2 m.



Resultado: $\omega_A = 196$ rad/s, $\omega_C = 65.3$ rad/s; $v_B = 4.90$ m/s hacia arriba.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 102.

Ejercicio propuesto 4.6.2 · Rueda de bicicleta

Adaptado de: 1er final 2015-2, versión A, problema 3

Un ciclista se mueve hacia la derecha a 36 km/h. Las ruedas, de 500 mm de diámetro, ruedan sin deslizar. En la rueda trasera, A es el punto más alto, B el centro (el eje) y O el punto de contacto con el piso. Determine las velocidades de A, O y B.

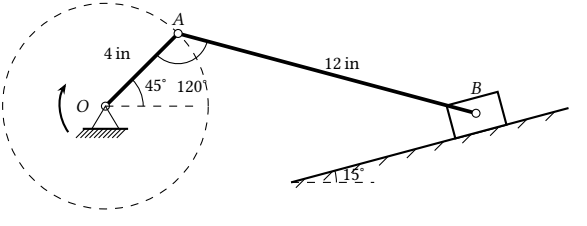
Resultado: $\omega = 40$ rad/s horario; $v_A = 20$ m/s y $v_B = 10$ m/s, ambas hacia la derecha; $v_O = 0$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 103.

Ejercicio propuesto 4.6.3 · Manivela-biela-corredera en un plano inclinado

Adaptado de: 1er final 2011-1, versión C, problema 3

La manivela OA, de 4 in, gira en sentido horario a razón constante de 100 rad/s; en el instante mostrado forma 45° con la horizontal. La barra conectora AB, de 12 in, forma 120° con OA (baja 15° bajo la horizontal hacia la derecha) y su extremo B es un deslizador que se mueve sobre una guía inclinada 15° sobre la horizontal (sube hacia la derecha). Calcule: a) la velocidad angular de AB; b) la velocidad del deslizador B.



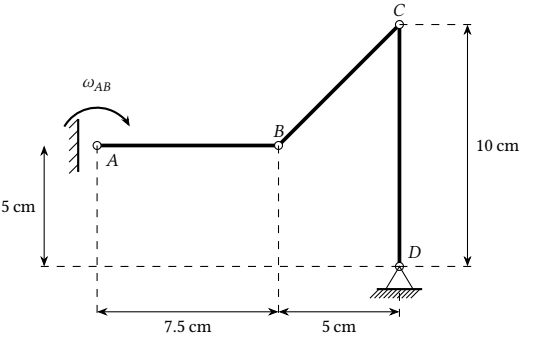
Resultado: a) $\omega_{AB} = 33.3$ rad/s antihorario; b) $v_B = 400$ in/s hacia arriba de la guía (15° sobre la horizontal).

→ Resolución en el Apéndice E, p. 103.

Ejercicio propuesto 4.6.4 · Cuatro articulaciones con una barra vertical

Adaptado de: 2º final 2013-1, problema 3

En el mecanismo de cuatro articulaciones de la figura, con origen en el apoyo D: $A = (-12.5,\ 5)$, $B = (-5,\ 5)$ y $C = (0,\ 10)$ [cm]; AB es horizontal, BC sube a 45° y CD es vertical. La manivela AB gira con velocidad angular constante de 4 rad/s en sentido horario. Determine: a) la velocidad angular de BC; b) la aceleración angular de CD.



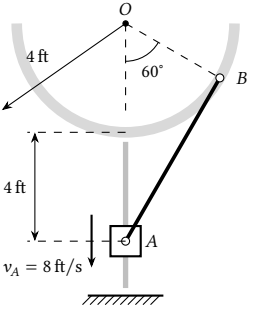
Resultado: a) $\omega_{BC} = 6$ rad/s antihorario ($\omega_{CD} = 3$ rad/s antihorario); b) $\alpha_{CD} = 39\ \text{rad/s}^2$ antihorario ($\alpha_{BC} = 18\ \text{rad/s}^2$ antihorario).

→ Resolución en el Apéndice E, p. 103.

Ejercicio propuesto 4.6.5 · Barra entre un collarín y una ranura semicircular

Adaptado de: 2º final 2018-1, problema 3

La barra AB une el collarín A, que baja a 8 ft/s por un vástago vertical, con el perno B, que se desliza en una ranura semicircular de 4 ft de radio y centro O. El vástago pasa por O; B está en la ranura a 60° de la vertical que pasa por O, del lado derecho, y A está 4 ft abajo del punto más bajo de la ranura. Para la posición mostrada, determine: a) la magnitud y el sentido de la velocidad angular de AB; b) la magnitud y la dirección de la velocidad de B.



Resultado: a) $\omega_{AB} = 0.577$ rad/s antihorario; b) $v_B = 6.93$ ft/s, tangente a la ranura, hacia abajo y a la izquierda a 60° bajo la horizontal.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 104.

4.7 Errores frecuentes

- Usar el diámetro como radio en $v = \omega r$ (ruedas «de 500 mm»).
- Olvidar que la velocidad angular es **del cuerpo**: todos los puntos de una barra tienen la misma ω, pero cada barra tiene la suya.
- Escribir $\vec{v}_C = \vec{v}_B + \vec{\omega}_{AB} \times \vec{r}_{C/B}$ con la ω de otra barra.
- Usar el CIR para aceleraciones: $\vec{a} \neq \alpha\, \vec{r}_{P/I}$, porque el CIR tiene aceleración.
- Olvidar el término $-\omega^2 \vec{r}_{B/A}$ o ponerlo con el signo cambiado (va de B hacia A).
- Calcular aceleraciones sin haber calculado antes todas las ω.
- Dar $a = \alpha r$ para un punto del borde de una polea: falta $a_n = \omega^2 r$. En cambio, un tramo recto de banda o un bloque colgado solo tiene $a = \alpha r$.
- Con $\alpha(\theta)$ o $\alpha(\omega)$, integrar como si α fuera constante, o dejar el ángulo en revoluciones.
- Invertir el sentido en engranes: en contacto exterior giran en sentidos opuestos.
- Leer mal la geometría: el ángulo de una barra se obtiene del triángulo con las cotas ($\sin\beta = h/L$), no a simple vista. Escribe las coordenadas de cada articulación antes de empezar.
- Dar solo la magnitud de ω o de α: el examen pide magnitud **y** sentido.

4.8 Formulario de emergencia de la unidad

Tema	Expresiones
Rotación	$\omega = \dot{\theta}$, $\alpha = \dot{\omega} = \omega\, \mathrm{d}\omega/\mathrm{d}\theta$; con α constante, $\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha\,\Delta\theta$
Punto a distancia r	$v = \omega r$, $a_t = \alpha r$, $a_n = \omega^2 r$; $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$, $\vec{a} = \vec{\alpha} \times \vec{r} - \omega^2 \vec{r}$
Producto cruz	$\omega\hat{k} \times (x\hat{\imath} + y\hat{\jmath}) = \omega(-y\hat{\imath} + x\hat{\jmath})$
Transmisión	$\omega_1 r_1 = \omega_2 r_2$, $\alpha_1 r_1 = \alpha_2 r_2$, $\theta_1 r_1 = \theta_2 r_2$
Rodadura	CIR en el contacto: $v_G = \omega r$, $a_G = \alpha r$; el punto más alto, $2v_G$
Velocidad relativa	$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{\omega} \times \vec{r}_{B/A}$
CIR	cruce de perpendiculares a las $\vec{v}$; $v_P = \omega\, r_{P/I}$
Aceleración relativa	$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{\alpha} \times \vec{r}_{B/A} - \omega^2 \vec{r}_{B/A}$
Sistema que gira	$\vec{a}_P = \vec{\alpha} \times \vec{r} - \omega^2 \vec{r} + 2\vec{\omega} \times \vec{v}_{\mathrm{rel}} + \vec{a}_{\mathrm{rel}}$

4.9 Procedimiento recomendado en el examen

1. Redibuja el mecanismo con ejes x, y y escribe las coordenadas de cada articulación.
2. Clasifica cada cuerpo: eje fijo, traslación o movimiento plano general.
3. Si es una polea o un engrane con α variable, integra primero (4.3.1) y luego transmite (4.3.2).
4. Velocidades: barra por barra, con el método vectorial o el CIR; anota cada ω con su sentido.
5. Aceleraciones (si las piden): con todas las ω ya conocidas, iguala las dos expresiones de la aceleración del punto común y separa componentes.
6. Responde con magnitud, dirección y sentido; comprueba una velocidad con el CIR.

Unidad 5 · Cinética del cuerpo rígido: traslación, rotación y movimiento plano general

Objetivo (programa de la asignatura). El alumno aplicará ecuaciones que relacionen al sistema de fuerzas que actúa sobre un cuerpo rígido, homogéneo y simétrico, con la aceleración angular que adquiere éste y con la aceleración lineal de su centro de masa, en la resolución de ejercicios de su movimiento plano.

Instrucciones de emergencia

- **Frecuencia:** aparece en 25 de los 27 exámenes de 2007-2 a 2018-2 (las versiones de un mismo examen cuentan como uno) y en los 8 exámenes desde 2014; son 46 problemas contando todas las versiones. Casi siempre es el último problema: es el problema 4 en 35 de los 41 exámenes de cuatro problemas.
- **Tiempo:** de 5 a 6 horas para esta unidad.
- **Ruta corta:**
  1. Lee la sección 5.1 con la tabla de momentos de inercia a la vista (30 min).
  2. Sigue el ejemplo 5.4 tapando la resolución.
  3. Resuelve los ejercicios 5.5 con cronómetro (25 min cada uno).

5.1 Conceptos y expresiones

5.1.1 Ecuaciones del movimiento plano

Un cuerpo rígido en movimiento plano tiene tres ecuaciones de movimiento: dos de fuerzas, que gobiernan la aceleración $\bar{a}$ del centro de masa G, y una de momentos, que gobierna la aceleración angular α:

$$\sum F_x = m\bar{a}_x, \qquad \sum F_y = m\bar{a}_y, \qquad \sum M_G = \bar{I}\alpha.$$

El momento se toma **respecto al centro de masa** G. Se elige un sentido positivo de giro y se usa el mismo para $\sum M_G$ y para α.

Si el cuerpo gira alrededor de un **eje fijo** que pasa por O, la ecuación de momentos puede tomarse respecto a O, y entonces no aparecen las reacciones del apoyo:

$$\sum M_O = I_O\alpha, \qquad I_O = \bar{I} + m\bar{r}^{\,2},$$

donde $\bar{r}$ es la distancia de O a G. Solo vale para O fijo (o para $O = G$).

5.1.2 Momento de inercia, radio de giro y ejes paralelos

El momento de inercia mide la resistencia del cuerpo a cambiar su rotación; es el equivalente de la masa en la ecuación de momentos:

$$I = \int r^2 \, \mathrm{d}m, \qquad \bar{k} = \sqrt{\bar{I}/m} \;\Rightarrow\; \bar{I} = m\bar{k}^2.$$

El radio de giro $\bar{k}$ es la distancia a la que habría que concentrar toda la masa para tener el mismo momento de inercia. En los exámenes de poleas y carretes suele darse $\bar{k}$ en lugar de $\bar{I}$; si el dato es el peso W, la masa es $m = W/g$.

Teorema de los ejes paralelos. Para un eje paralelo al centroidal, a una distancia d de G:

$$I = \bar{I} + md^2.$$

Siempre se parte del eje que pasa por G; nunca se pasa directamente de un eje no centroidal a otro.

Cuerpo homogéneo	Eje	Momento de inercia
Barra delgada de longitud L	perpendicular, por G	$\bar{I} = \frac{1}{12}mL^2$
Barra delgada de longitud L	perpendicular, por un extremo	$I = \frac{1}{3}mL^2$
Disco o cilindro macizo de radio r	su eje	$\bar{I} = \frac{1}{2}mr^2$
Aro o cilindro de pared delgada	su eje	$\bar{I} = mr^2$
Esfera maciza de radio r	diámetro	$\bar{I} = \frac{2}{5}mr^2$
Cascarón esférico delgado	diámetro	$\bar{I} = \frac{2}{3}mr^2$
Placa rectangular $a \times b$	perpendicular, por G	$\bar{I} = \frac{1}{12}m(a^2 + b^2)$

Unidades: kg m^2 en el SI; slug ft^2 (es decir, lb ft s^2) en el sistema inglés.

5.1.3 Los tres tipos de movimiento plano

- **Traslación** ($\omega = 0, \alpha = 0$): todos los puntos tienen la misma aceleración. Las ecuaciones quedan $\sum F_x = m\bar{a}_x$, $\sum F_y = m\bar{a}_y$ y $\sum M_G = 0$. Es *rectilínea* si G va en línea recta (vehículo que frena, caja que sube por un plano) y *curvilínea* si G describe una curva sin que el cuerpo gire (placa colgada de dos barras paralelas iguales); en la curvilínea, $\bar{a}$ se expresa en componentes normal y tangencial: $\bar{a}_n = v^2/\rho$, $\bar{a}_t = \mathrm{d}v/\mathrm{d}t$.
- **Rotación alrededor de un eje fijo:** G describe una circunferencia de radio $\bar{r}$ alrededor de O, con

  $$\bar{a}_t = \bar{r}\alpha, \qquad \bar{a}_n = \bar{r}\omega^2 \text{ (dirigida hacia } O).$$

  Si el eje pasa por G (polea, volante), $\bar{a} = 0$ y las fuerzas del apoyo equilibran el peso y las tensiones.
- **Movimiento plano general:** el cuerpo se traslada y gira a la vez. El caso típico es la rueda o el carrete que **rueda sin deslizar**: el punto de contacto es el centro instantáneo de rotación (Unidad 4) y

  $$\bar{v} = \omega r, \qquad \bar{a} = \alpha r.$$

  La fricción en el contacto es *estática*, de valor desconocido y con la condición $F \le \mu_s N$. Si la rueda **desliza**, $\bar{a}$ y α son independientes y $F = \mu_k N$.

5.1.4 Energía del cuerpo rígido

El programa de esta unidad no menciona la energía del cuerpo rígido, pero los exámenes la usan para hallar la rapidez angular después de un giro (por ejemplo, 1er final 2009-2,

versión A, problema 4, y 2º final 2008-2, versión A, problema 3). La energía cinética de un cuerpo rígido en movimiento plano es

$$T = \tfrac{1}{2}m\bar{v}^2 + \tfrac{1}{2}\bar{I}\omega^2,$$

y en rotación alrededor de un eje fijo O, $T = \tfrac{1}{2}I_O\omega^2$. El principio es el mismo de la Unidad 3:

$$U_{1\to 2} = \Delta T + \Delta V_g + \Delta V_e,$$

donde $U_{1\to 2}$ es el trabajo de las fuerzas que no tienen energía potencial. Un par constante M que gira un ángulo $\Delta\theta$ (en radianes) hace el trabajo $U = M\,\Delta\theta$; una fuerza de magnitud constante, siempre perpendicular a una barra y aplicada a una distancia d del eje, hace $U = Fd\,\Delta\theta$. El peso solo cuenta por el cambio de altura de G: $\Delta V_g = mg\,\Delta y_G$.

5.2 Cómo reconocer el problema

Si el enunciado dice…	Se trata de…	Procedimiento
«radio de giro», «momento de inercia de la masa», cuerpo compuesto	cálculo de $\bar{I}$ o I_O	5.3.1
«no gira», «se levanta sin girar», vehículo que frena o acelera, reacciones en cada rueda	traslación rectilínea	5.3.2
«sin volcar», «sin que vuelque», caja sobre plataforma	traslación con condición de volcamiento	5.3.2
placa colgada de dos barras o cuerdas paralelas iguales	traslación curvilínea	5.3.2
barra o placa articulada en un punto que no es G, «se rompe el pasador», «se suelta»	rotación no centroidal	5.3.3
«rueda sin deslizar», cilindro, esfera o carrete sobre un plano	movimiento plano general	5.3.4
«determine si rueda o desliza», se dan μ_s y μ_k	suponer y comprobar	5.3.4
polea doble, volante o carrete con cuerpos colgados	poleas y cuerpos colgantes	5.3.5
«velocidad angular cuando haya girado…», «cuando $\theta = \ldots$»	energía del cuerpo rígido	5.3.6

5.3 Procedimientos

5.3.1 Momento de inercia y radio de giro

1. Identifica el eje: el centroidal (por G) o el de giro (O).
2. Si se da el peso, calcula $m = W/g$ con el g del examen.
3. Si se da $\bar{k}$: $\bar{I} = m\bar{k}^2$. Si no, toma $\bar{I}$ de la tabla de la sección 5.1.2.
4. Para un eje por O a una distancia d de G: $I_O = \bar{I} + md^2$.
5. Para un cuerpo compuesto (barra con esfera, rueda con cubo), traslada cada parte a O por separado y suma.

5.3.2 Traslación rectilínea y curvilínea

1. Dibuja el diagrama de cuerpo libre con todas las fuerzas en su **punto de aplicación real**: el momento depende de dónde actúan.
2. Escribe $\sum F_x = m\bar{a}_x$ y $\sum F_y = m\bar{a}_y$. En traslación curvilínea usa ejes normal y tangencial a la trayectoria de G; si el cuerpo parte del reposo, $\bar{a}_n = 0$.
3. Escribe $\sum M_G = 0$ (el cuerpo no gira).
4. **Volcamiento contra deslizamiento:** en el límite de volcar, la normal se concentra en la arista sobre la que el cuerpo giraría. Pon ahí la normal, plantea $\sum M_G = 0$ y despeja la fuerza máxima. Si la condición es «sin deslizar», usa $F \leq \mu_s N$.
5. **Vehículo que frena o acelera:** si patinan las cuatro ruedas, $F = \mu_k N$ en cada una. Con $\sum M_G = 0$ se reparte la normal entre ejes: al frenar carga más el eje delantero.

5.3.3 Rotación alrededor de un eje fijo no centroidal

1. Calcula $I_O = \bar{I} + m\bar{r}^{\,2}$.
2. Escribe $\sum M_O = I_O\alpha$: las reacciones del pasador no hacen momento y α sale directamente.
3. Si el cuerpo **se libera del reposo** o **se rompe un apoyo**, $\omega = 0$ en ese instante: $\bar{a}_n = 0$ y $\bar{a}_t = \bar{r}\alpha$, perpendicular a OG.
4. Si hay rapidez angular ω, $\bar{a}_n = \bar{r}\omega^2$ dirigida de G hacia O.
5. Con $\sum F = m\bar{a}$ en las direcciones normal y tangencial (o x e y) despeja las componentes de la reacción en O y su magnitud $R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2}$.

5.3.4 Movimiento plano general: rueda sin deslizar o desliza

1. Diagrama de cuerpo libre: peso en G, normal y fricción F en el contacto; la fricción se dibuja en un sentido supuesto.
2. Escribe $\sum F_x = m\bar{a}$, $\sum F_y = 0$ (para obtener N) y $\sum M_G = \bar{I}\alpha$.
3. **Supón que rueda sin deslizar:** $\bar{a} = \alpha r$. Resuelve y obtén la fricción necesaria F.
4. **Comprueba:** si $|F| \leq \mu_s N$, la suposición es correcta. Si $|F| > \mu_s N$, el cuerpo **desliza**: repite con $F = \mu_k N$ (en sentido opuesto al deslizamiento del punto de contacto) y con $\bar{a}$ y α independientes.
5. Para un cuerpo que baja rodando por un plano de ángulo θ sin otras fuerzas: $\bar{a} = \dfrac{g\sin\theta}{1 + \bar{k}^2/r^2}$ (esfera: $\frac{5}{7}g\sin\theta$; cilindro macizo: $\frac{2}{3}g\sin\theta$; aro: $\frac{1}{2}g\sin\theta$). Rueda sin deslizar si $\mu_s \geq \dfrac{\tan\theta}{1 + r^2/\bar{k}^2}$ (esfera: $\frac{2}{7}\tan\theta$).

5.3.5 Poleas, carretes y cuerpos colgantes

1. Separa el sistema: un diagrama para la polea o el carrete y uno para cada cuerpo colgado. Cada cuerda tiene su propia tensión (T_A, T_B).
2. Decide el sentido de giro comparando los momentos de los pesos colgados respecto al eje; si te equivocas, α sale negativa y basta cambiar el sentido.
3. **Relaciones cinemáticas:** un cuerpo colgado de una cuerda enrollada a un radio r de una polea con eje fijo tiene $a = r\alpha$. En un carrete que sube o baja enrollado en una cuerda fija, el punto de tangencia con esa cuerda no se acelera verticalmente:

$\bar{a} = r_{\text{cubo}}\,\alpha$, y otro punto a una distancia horizontal d de esa cuerda tiene $a = d\,\alpha$.

4. Ecuaciones: polea con eje fijo, $\sum M_O = \bar{I}\alpha$; carrete libre, $\sum F_y = m\bar{a}$ y $\sum M_G = \bar{I}\alpha$; cada cuerpo, $\sum F_y = ma$.
5. Sustituye las relaciones cinemáticas y resuelve el sistema (suele quedar una ecuación en α).

5.3.6 Energía del cuerpo rígido: rapidez angular tras un giro

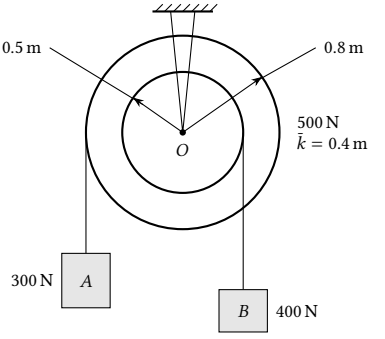
1. Elige los dos estados: el inicial (rapidez conocida) y el final (después del giro pedido).
2. Escribe la energía cinética de cada estado: $T = \frac{1}{2} I_O \omega^2$ si gira alrededor de un eje fijo; $T = \frac{1}{2} m \bar{v}^2 + \frac{1}{2} \bar{I} \omega^2$ en general (con $\bar{v} = \omega r$ si rueda sin deslizar).
3. Calcula los trabajos: pares, $M\Delta\theta$; fuerzas perpendiculares a una barra, $Fd\Delta\theta$; peso, por la altura de G (ΔV_g). Las reacciones de un pasador fijo y la fricción de una rueda que no desliza no trabajan.
4. Aplica $U_{1\to 2} = \Delta T + \Delta V_g + \Delta V_e$ y despeja ω. Si además se pide α o una reacción en esa posición, usa después las ecuaciones de la sección 5.3.3.

5.4 Ejemplo resuelto

Ejemplo resuelto · Polea doble con dos cuerpos colgantes

Adaptado del 1er final 2018-1, turno matutino, problema 4.

Una polea doble pesa 500 N y el radio de giro de su masa respecto a su eje de rotación, que es fijo, es de 0.4 m. El radio menor es de 0.5 m y el mayor de 0.8 m. Del lado izquierdo del tambor mayor cuelga el cuerpo A, de 300 N, y del lado derecho del tambor menor cuelga el cuerpo B, de 400 N, mediante cuerdas inextensibles de peso despreciable. Determine las tensiones T_A y T_B de las cuerdas.



Datos. $W = 500\,\text{N}$, $\bar{k} = 0.4\,\text{m}$, $r_A = 0.8\,\text{m}$, $r_B = 0.5\,\text{m}$, $W_A = 300\,\text{N}$, $W_B = 400\,\text{N}$, $g = 9.81\,\text{m/s}^2$.

Planteamiento. La polea gira alrededor de un eje fijo que pasa por su centro de masa O. Momentos de los pesos respecto a O: $300(0.8) = 240\,\text{N m}$ en sentido antihorario y $400(0.5) = 200\,\text{N m}$ en sentido horario; la polea gira en sentido **antihorario**, A baja

y B sube. Se toma positivo el sentido antihorario. Relaciones cinemáticas:

$$a_A = 0.8\alpha\ (\downarrow), \qquad a_B = 0.5\alpha\ (\uparrow).$$

Masas: $m = 500/9.81 = 50.97\,\text{kg}$, $m_A = 30.58\,\text{kg}$, $m_B = 40.77\,\text{kg}$. Momento de inercia: $\bar{I} = m\bar{k}^2 = 50.97(0.4)^2 = 8.155\,\text{kg}\,\text{m}^2$.

Resolución. Cuerpo A (positivo hacia abajo), cuerpo B (positivo hacia arriba) y polea:

$$\begin{aligned} 300 - T_A &= 30.58(0.8\alpha) = 24.46\alpha, \\ T_B - 400 &= 40.77(0.5\alpha) = 20.39\alpha, \\ 0.8T_A - 0.5T_B &= 8.155\alpha. \end{aligned}$$

Se sustituyen $T_A = 300 - 24.46\alpha$ y $T_B = 400 + 20.39\alpha$ en la ecuación de momentos:

$$240 - 19.57\alpha - 200 - 10.19\alpha = 8.155\alpha \ \Rightarrow\ \alpha = \frac{40}{37.92} = 1.055\,\text{rad/s}^2.$$

$$T_A = 300 - 24.46(1.055) = 274.2\,\text{N}, \qquad T_B = 400 + 20.39(1.055) = 421.5\,\text{N}.$$

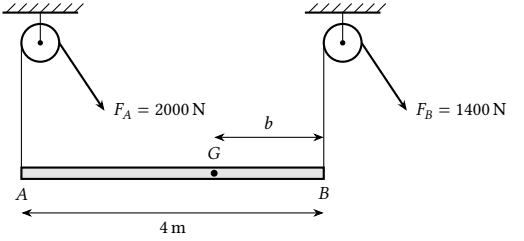
Resultado. $T_A = 274\,\text{N}$ y $T_B = 422\,\text{N}$ (con $\alpha = 1.05\,\text{rad/s}^2$ en sentido antihorario).

5.5 Ejercicios de examen resueltos

Ejercicio 5.5.1 · Viga levantada sin girar

Adaptado de: 1er final 2015-1, versión A, problema 4

En una obra se levanta una viga no homogénea de 4 m de longitud y 3000 N de peso con dos cuerdas verticales sujetas a sus extremos A y B. Cada cuerda pasa por una polea fija en lo alto y de su otro extremo se tira con una fuerza constante: $F_A = 2000\,\text{N}$ en la cuerda de A y $F_B = 1400\,\text{N}$ en la de B. La viga parte del reposo y sube sin girar. Determine la aceleración con la que se eleva y la distancia del extremo A a la que se encuentra su centro de gravedad G.



Datos. $L = 4\,\text{m}$, $W = 3000\,\text{N}$, $F_A = 2000\,\text{N}$, $F_B = 1400\,\text{N}$, $g = 9.81\,\text{m/s}^2$.

Planteamiento. Las poleas son ideales: la tensión de cada cuerda en la viga es igual a la fuerza con la que se tira, y actúa vertical hacia arriba. La viga no gira: **traslación rectilínea** vertical, con $\sum F_y = m\bar{a}$ y $\sum M_G = 0$. Sea d la distancia de A a G.

Resolución. Fuerzas verticales (positivo hacia arriba):

$$2000 + 1400 - 3000 = \frac{3000}{9.81}\,\bar{a} \;\Rightarrow\; \bar{a} = \frac{400(9.81)}{3000} = 1.308\,\text{m/s}^2.$$

Momentos respecto a G (las dos fuerzas de las cuerdas tienen brazo; el peso no):

$$-2000\,d + 1400\,(4 - d) = 0 \;\Rightarrow\; 3400\,d = 5600 \;\Rightarrow\; d = 1.647\,\text{m}.$$

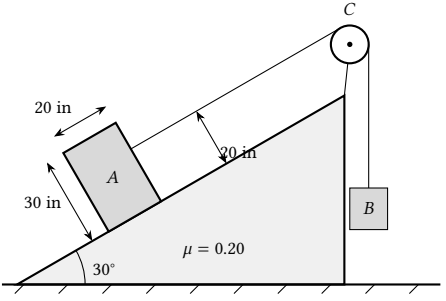
La cuerda con más tensión está más cerca de G: tiene menor brazo para que los dos momentos se equilibren.

Resultado. $\bar{a} = 1.31\,\text{m/s}^2$ hacia arriba; G está a 1.65 m del extremo A ($b = 2.35\,\text{m}$ de B).

Ejercicio 5.5.2 · Bloque que sube por un plano sin volcar

Adaptado de: 1er final 2011-2, versión C, problema 4

Un bloque homogéneo A de 180 lb mide 20 in a lo largo de un plano inclinado a 30° y 30 in de altura (perpendicular al plano). Una cuerda paralela al plano, atada a la cara de A que mira hacia arriba del plano a 20 in de la superficie, pasa por una polea lisa C y sostiene un cuerpo colgante B. El coeficiente de fricción entre el bloque y el plano es $\mu = 0.20$. Calcule el peso máximo de B para que A deslice hacia arriba del plano sin volcar, y la aceleración con la que sube.



Datos. $W_A = 180\,\text{lb}$, base 20 in, altura 30 in, cuerda a 20 in del plano, $\theta = 30°$, $\mu = 0.20$, $g = 32.2\,\text{ft/s}^2$.

Planteamiento. A está en **traslación rectilínea**. Ejes: x paralelo al plano, hacia arriba; y perpendicular. G está en el centro del bloque, a 15 in del plano. Respecto a G, la cuerda está 5 in arriba y la base 15 in abajo. Al aumentar B, la tensión crece y el bloque tiende a volcar hacia adelante, girando sobre la arista inferior delantera (la que mira hacia la polea). En el límite, toda la normal actúa en esa arista, a 10 in de G medidos a lo largo del plano. Como el bloque desliza, $F = \mu N$ hacia abajo del plano. Positivo antihorario para los momentos.

Resolución. Perpendicular al plano, $N = 180\cos 30° = 155.9\,\text{lb}$, y la fricción vale $F = 0.2(155.9) = 31.18\,\text{lb}$.

Momentos respecto a G en el límite de volcar (las distancias en pulgadas):

$$N(10) - F(15) - T(5) = 0 \;\Rightarrow\; T = \frac{1558.8 - 467.7}{5} = 218.2\,\text{lb}.$$

A lo largo del plano:

$$218.2 - 180\sin 30^\circ - 31.18 = \frac{180}{32.2}\,a \;\Rightarrow\; a = \frac{97.06}{5.590} = 17.36\,\text{ft/s}^2.$$

Cuerpo B (baja con la misma aceleración): $W_B - T = \dfrac{W_B}{32.2}\,a$, de donde

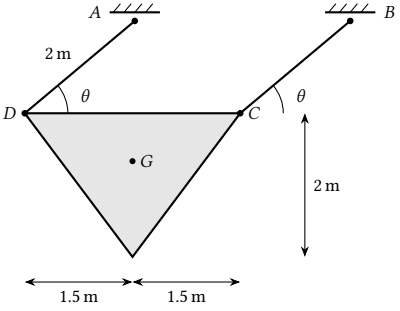
$$W_B = \frac{T}{1 - a/g} = \frac{218.2}{1 - 17.36/32.2} = 473.6\,\text{lb}.$$

Resultado. $W_{B,\mathbf{max}} = 474\,\text{lb}$ y $a = 17.4\,\text{ft/s}^2$ hacia arriba del plano (tensión $T = 218\,\text{lb}$).

Ejercicio 5.5.3 · Placa colgada de dos barras paralelas

Adaptado de: 1er final 2012-2, versión A, problema 4

Una placa triangular homogénea de 40 kg tiene su lado superior DC horizontal, de 3 m, y su tercer vértice 2 m debajo del punto medio de DC. Cuelga de dos barras paralelas AD y BC de 2 m y masa despreciable, articuladas en el techo en A y B ($AB = DC$). La placa se suelta del reposo cuando las barras forman un ángulo $\theta = 40^\circ$ con la horizontal. Para esa posición, determine: a) la tensión de cada barra; b) la aceleración del centro de masa de la placa.



Datos. $m = 40\,\text{kg}$, barras de 2 m, $DC = 3\,\text{m}$, altura del triángulo 2 m, $\theta = 40^\circ$, $\omega = 0$, $g = 9.81\,\text{m/s}^2$.

Planteamiento. $ABCD$ es un paralelogramo: la placa no gira, está en **traslación curvilínea**. Todos sus puntos tienen la aceleración de D, que describe una circunferencia de radio 2 m alrededor de A. Como parte del reposo, $\bar{a}_n = 0$ y $\bar{a} = \bar{a}_t$, perpendicular a las barras. Ejes: n a lo largo de las barras (hacia el techo) y t perpendicular, hacia abajo y a la derecha, a 50° bajo la horizontal. G está a $\frac{1}{3}(2) = 0.667\,\text{m}$ debajo de DC, en la vertical del punto medio. Las barras solo transmiten fuerza axial (T_A en D, T_B en C, en la dirección de 40°).

Resolución. Dirección tangencial (las tensiones no tienen componente):

$$mg\cos 40^\circ = m\bar{a}_t \;\Rightarrow\; \bar{a}_t = 9.81\cos 40^\circ = 7.51\,\text{m/s}^2.$$

Dirección normal:

$$T_A + T_B - mg\sin 40^\circ = m\bar{a}_n = 0 \;\Rightarrow\; T_A + T_B = 252.2\,\text{N}.$$

Momentos respecto a G (positivo antihorario). D está en $(-1.5,\ 0.667)$ y C en $(1.5,\ 0.667)$ respecto a G; con $M = xF_y - yF_x$:

$$\begin{gathered} T_A\left[-1.5\sin 40^\circ - 0.667\cos 40^\circ\right] \\ + T_B\left[1.5\sin 40^\circ - 0.667\cos 40^\circ\right] = 0, \\ -1.475\,T_A + 0.4535\,T_B = 0. \end{gathered}$$

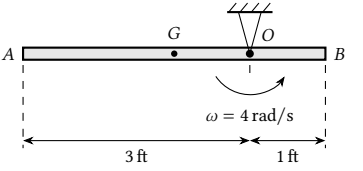
Entonces $T_B = 3.252\,T_A$ y $4.252\,T_A = 252.2$.

Resultado. a) $T_{AD} = 59.3$ N y $T_{BC} = 192.9$ N (tensión). b) $\bar{a} = 7.51\,\text{m/s}^2$, hacia abajo y a la derecha, a 50° bajo la horizontal.

Ejercicio 5.5.4 · Barra que gira alrededor de un pasador

Adaptado de: 1er final 2015-1, versión B, problema 4

La barra delgada homogénea AB, de 16.1 lb y 4 ft de longitud, gira alrededor de un eje horizontal que pasa por O, a 3 ft de A y 1 ft de B. En la posición mostrada la barra está horizontal y tiene una rapidez angular de 4 rad/s en sentido antihorario. Con $\bar{I} = \frac{1}{12}mL^2$, determine para ese instante la aceleración angular de la barra y la magnitud de la reacción de la articulación O sobre ella.



Datos. $W = 16.1$ lb, $L = 4$ ft, $\bar{r} = OG = 3 - 2 = 1$ ft, $\omega = 4$ rad/s, $g = 32.2\,\text{ft/s}^2$.

Planteamiento. Rotación alrededor de un eje fijo no centroidal. $m = 16.1/32.2 = 0.5$ slug. $\bar{I} = \frac{1}{12}(0.5)(4)^2 = 0.6667$ slug ft^2; $I_O = 0.6667 + 0.5(1)^2 = 1.1667$ slug ft^2. G está a la izquierda de O: el peso hace girar la barra en sentido antihorario. Componentes de $\bar{a}$: tangencial $\bar{r}\alpha$ (vertical) y normal $\bar{r}\omega^2$ (horizontal, de G hacia O, a la derecha).

Resolución.

$$\sum M_O = I_O\alpha: \qquad 16.1(1) = 1.1667\,\alpha \;\Rightarrow\; \alpha = 13.8\,\text{rad/s}^2.$$

$\bar{a}_t = 1(13.8) = 13.8\,\text{ft/s}^2$ hacia abajo; $\bar{a}_n = 1(4)^2 = 16\,\text{ft/s}^2$ hacia la derecha. Con la reacción R_x, R_y en O:

$$\begin{aligned} \sum F_y = m\bar{a}_y: &\qquad R_y - 16.1 = -0.5(13.8) \;\Rightarrow\; R_y = 9.2\,\text{lb}, \\ \sum F_x = m\bar{a}_x: &\qquad R_x = 0.5(16) = 8\,\text{lb}. \end{aligned}$$

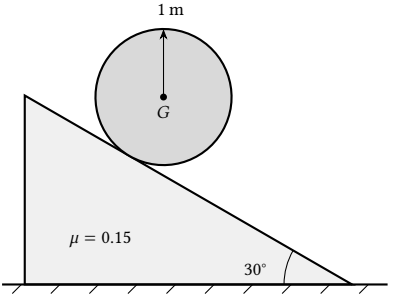
$$R = \sqrt{9.2^2 + 8^2} = 12.19\,\text{lb}.$$

Resultado. $\alpha = 13.8\,\text{rad/s}^2$ en sentido antihorario; $R_O = 12.2\,\text{lb}$ ($R_x = 8\,\text{lb}$ hacia la derecha, $R_y = 9.2\,\text{lb}$ hacia arriba).

Ejercicio 5.5.5 · Esfera en un plano: ¿rueda o desliza?

Adaptado de: 2º final 2009-2, versión A, problema 4

Una esfera homogénea de 50 kg y 1 m de radio se suelta desde el reposo sobre un plano inclinado a 30° con la horizontal. El coeficiente de fricción, tanto estático como cinético, es 0.15. Determine si rueda o no sin deslizar, su aceleración angular, la aceleración de su centro de masa y la magnitud de la fuerza de fricción que el plano ejerce sobre la esfera.



Datos. $m = 50\,\text{kg}$, $r = 1\,\text{m}$, $\theta = 30°$, $\mu_s = \mu_k = 0.15$, $g = 9.81\,\text{m/s}^2$, $\bar{I} = \frac{2}{5}mr^2 = 20\,\text{kg m}^2$.
Planteamiento. Movimiento plano general: se supone que rueda y se comprueba. Ejes: x a lo largo del plano, hacia abajo; y perpendicular. La fricción F actúa hacia arriba del plano y hace girar la esfera en sentido horario (positivo).

$$mg\sin\theta - F = m\bar{a}, \qquad N - mg\cos\theta = 0, \qquad Fr = \bar{I}\alpha.$$

Resolución. Normal: $N = 50(9.81)\cos 30° = 424.8\,\text{N}$; fricción disponible: $\mu_s N = 63.7\,\text{N}$.
Suposición: rueda sin deslizar ($\bar{a} = \alpha r$). De la ecuación de momentos, $F = \bar{I}\bar{a}/r^2 = \frac{2}{5}m\bar{a}$; sustituyendo:

$$\bar{a} = \tfrac{5}{7}g\sin 30° = 3.504\,\text{m/s}^2,$$

$$F = mg\sin 30° - m\bar{a} = 245.3 - 175.2 = 70.1\,\text{N}.$$

Comprobación: $70.1\,\text{N} > 63.7\,\text{N}$: la fricción necesaria excede la disponible, **la esfera desliza**. (Equivale a $\mu_s = 0.15 < \frac{2}{7}\tan 30° = 0.165$.)
Con deslizamiento, $F = \mu_k N = 63.7\,\text{N}$:

$$\bar{a} = 9.81\sin 30° - \frac{63.7}{50} = 3.63\,\text{m/s}^2, \qquad \alpha = \frac{Fr}{\bar{I}} = \frac{63.7(1)}{20} = 3.19\,\text{rad/s}^2.$$

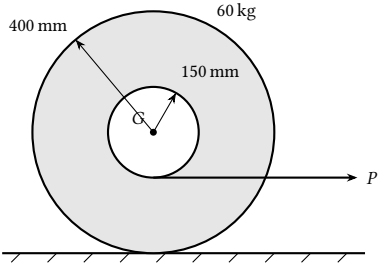
Comprobación del sentido: $\bar{a} - \alpha r = 0.44 > 0$, el punto de contacto resbala hacia abajo del plano y la fricción apunta hacia arriba, como se supuso.

Resultado. No rueda sin deslizar; $\alpha = 3.19\,\text{rad/s}^2$ (horario), $\bar{a} = 3.63\,\text{m/s}^2$ hacia abajo del plano y $F = 63.7\,\text{N}$.

Ejercicio 5.5.6 · Carrete jalado por un cable: suponer y comprobar

Adaptado de: 1er final 2015-2, versión B, problema 4

Un carrete de 60 kg tiene un radio exterior de 400 mm y un momento de inercia de masa respecto a su centro G de $1.35\,\text{kg m}^2$. Descansa sobre un suelo horizontal; los coeficientes de fricción estática y cinética entre el carrete y el suelo son 0.3 y 0.27. Del punto más bajo de su cubo, de 150 mm de radio, sale un cable enrollado del que se tira con una fuerza horizontal constante $P = 450\,\text{N}$ hacia la derecha. Encuentre la aceleración del centro de masa G.



Datos. $m = 60\,\text{kg}$, $R = 0.4\,\text{m}$, $r = 0.15\,\text{m}$, $\bar{I} = 1.35\,\text{kg m}^2$, $\mu_s = 0.3$, $\mu_k = 0.27$, $P = 450\,\text{N}$, $g = 9.81\,\text{m/s}^2$.

Planteamiento. Movimiento plano general. Fuerzas: P a 0.15 m debajo de G, hacia la derecha; peso; normal N y fricción F (supuesta hacia la izquierda) en el contacto, a 0.4 m debajo de G. Momentos respecto a G, positivo antihorario: P da $+0.15P$ y F da $-0.4F$.

$$P - F = m\bar{a}, \qquad N = mg = 588.6\,\text{N},$$
$$0.15P - 0.4F = \bar{I}\alpha_{\text{antihorario}}.$$

Resolución. *Suposición: rueda sin deslizar.* Si G avanza a la derecha, el carrete gira en sentido horario: $\alpha_{\text{antihorario}} = -\bar{a}/0.4$.

$$67.5 - 0.4F = -1.35\,\frac{\bar{a}}{0.4} = -3.375\,\bar{a}, \qquad F = 450 - 60\bar{a}.$$

$$67.5 - 180 + 24\bar{a} = -3.375\,\bar{a} \;\Rightarrow\; \bar{a} = \frac{112.5}{27.375} = 4.110\,\text{m/s}^2, \quad F = 203.4\,\text{N}.$$

Comprobación: $\mu_s N = 0.3(588.6) = 176.6\,\text{N} < 203.4\,\text{N}$: **el carrete desliza**.
Con deslizamiento, $F = \mu_k N = 0.27(588.6) = 158.9\,\text{N}$:

$$\bar{a} = \frac{450 - 158.9}{60} = 4.85\,\text{m/s}^2, \qquad \alpha = \frac{67.5 - 0.4(158.9)}{1.35} = 2.91\,\text{rad/s}^2$$

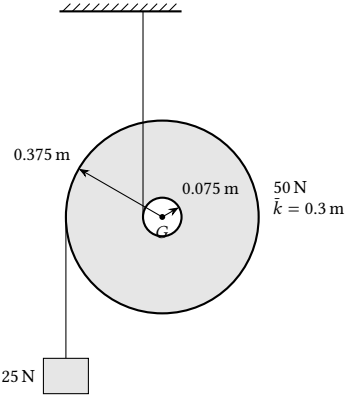
en sentido antihorario. Comprobación del sentido: el punto de contacto tiene $a = 4.85 + 0.4(2.91) = 6.0\,\mathrm{m/s^2}$ hacia la derecha; resbala hacia la derecha y la fricción apunta a la izquierda, como se supuso.

Resultado. El carrete **desliza**; $\bar{a} = 4.85\,\mathrm{m/s^2}$ hacia la derecha.

Ejercicio 5.5.7 · Carrete que cuelga de su cubo

Adaptado de: 2° final 2015-2, problema 4

Un carrete de 50 N tiene un radio de giro centroidal $\bar{k} = 0.3\,\mathrm{m}$. Su cubo, de 0.075 m de radio, está enrollado en una cuerda vertical sujeta al techo, que baja tangente al lado izquierdo del cubo. Del lado izquierdo del disco exterior, de 0.375 m de radio, cuelga un cuerpo de 25 N mediante otra cuerda enrollada. Determine la tensión de la cuerda que sostiene al cuerpo de 25 N, la aceleración angular del carrete y la aceleración de su centro de masa G.



Datos. $W = 50\,\mathrm{N}$, $\bar{k} = 0.3\,\mathrm{m}$, $r_i = 0.075\,\mathrm{m}$, $r_e = 0.375\,\mathrm{m}$, $W_C = 25\,\mathrm{N}$, $g = 9.81\,\mathrm{m/s^2}$.

Planteamiento. El carrete está en **movimiento plano general**. $m = 5.097\,\mathrm{kg}$, $\bar{I} = m\bar{k}^2 = 0.4587\,\mathrm{kg\,m^2}$, $m_C = 2.548\,\mathrm{kg}$. Tensiones: T_{techo} en la cuerda del techo y T_C en la del cuerpo. Positivo antihorario y hacia arriba para el carrete.

Cinemática. El punto del cubo tangente a la cuerda fija no se acelera verticalmente: $\bar{a} = r_i\alpha = 0.075\alpha$ (hacia arriba si el giro es antihorario). El punto del disco exterior del que cuelga el cuerpo está a $r_e - r_i = 0.3\,\mathrm{m}$ a la izquierda de esa cuerda, así que el cuerpo baja con

$$a_C = (0.375 - 0.075)\alpha = 0.3\alpha.$$

Resolución. Cuerpo (positivo hacia abajo), carrete en y y momentos respecto a G (T_C, a 0.375 m a la izquierda, hace momento antihorario; T_{techo}, a 0.075 m a la izquierda, horario):

$$\begin{aligned} 25 - T_C &= 2.548(0.3\alpha) = 0.7645\alpha, \\ T_{\text{techo}} - T_C - 50 &= 5.097(0.075\alpha) = 0.3823\alpha, \\ 0.375\,T_C - 0.075\,T_{\text{techo}} &= 0.4587\alpha. \end{aligned}$$

De las dos primeras, $T_C = 25 - 0.7645\alpha$ y $T_{\text{techo}} = 75 - 0.3823\alpha$. En la tercera:

$$9.375 - 0.2867\alpha - 5.625 + 0.0287\alpha = 0.4587\alpha \;\Rightarrow\; \alpha = \frac{3.75}{0.7167} = 5.23\,\text{rad/s}^2.$$

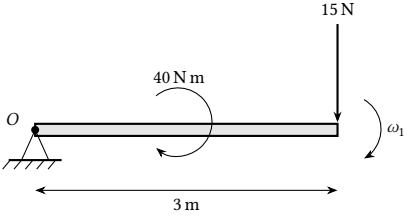
$$T_C = 25 - 0.7645(5.23) = 21.0\,\text{N}, \qquad \bar{a} = 0.075(5.23) = 0.392\,\text{m/s}^2.$$

Resultado. $T_C = 21.0\,\text{N}$, $\alpha = 5.23\,\text{rad/s}^2$ en sentido antihorario y $\bar{a} = 0.392\,\text{m/s}^2$ hacia arriba (el cuerpo baja con $1.57\,\text{m/s}^2$).

Ejercicio 5.5.8 · Barra con un par: rapidez angular tras una vuelta

Adaptado de: 1er final 2009-2, versión A, problema 4

Una barra esbelta de 4 kg y 3 m está articulada en su extremo O y se mueve en un plano vertical. Sobre ella actúan un par de 40 N m en sentido horario y una fuerza de 15 N aplicada en el extremo libre, siempre perpendicular a la barra y en el sentido del giro. Cuando la barra está horizontal tiene una velocidad angular $\omega_1 = 6\,\text{rad/s}$ en sentido horario. Determine su velocidad angular cuando haya girado 360°.



Datos. $m = 4\,\text{kg}$, $L = 3\,\text{m}$, $M = 40\,\text{N m}$, $F = 15\,\text{N}$ a $d = 3\,\text{m}$ de O, $\omega_1 = 6\,\text{rad/s}$, $\Delta\theta = 2\pi$, $g = 9.81\,\text{m/s}^2$.

Planteamiento. Rotación alrededor de un eje fijo; se pide una rapidez después de un giro: **energía del cuerpo rígido**. $I_O = \frac{1}{3}mL^2 = \frac{1}{3}(4)(3)^2 = 12\,\text{kg m}^2$. Tras una vuelta completa G vuelve a la misma altura: $\Delta V_g = 0$.

$$U_{1\to 2} = \Delta T, \qquad U_{1\to 2} = M\Delta\theta + Fd\,\Delta\theta.$$

Resolución.

$$U_{1\to 2} = 40(2\pi) + 15(3)(2\pi) = 251.3 + 282.7 = 534.1\,\text{J}.$$

$$T_{\text{ini}} = \tfrac{1}{2}(12)(6)^2 = 216\,\text{J}, \qquad T_{\text{fin}} = 216 + 534.1 = 750.1\,\text{J} = \tfrac{1}{2}(12)\,\omega_2^2.$$

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{2(750.1)}{12}} = 11.18\,\text{rad/s}.$$

La misma respuesta sale de $\sum M_O = I_O\alpha$, con $\alpha = 7.08 + 4.91\cos\theta$, integrando $\omega\,\mathrm{d}\omega = \alpha\,\mathrm{d}\theta$ de 0 a 2π: el término del peso se anula en la vuelta completa.

Resultado. $\omega_2 = 11.2\,\text{rad/s}$ en sentido horario.

5.6 Ejercicios propuestos

Ejercicio propuesto 5.6.1 · Volante con un cuerpo colgado

Adaptado de: 1er final 2018-1, turno vespertino, problema 4

Un volante de 250 lb y 40 in de diámetro gira sin fricción alrededor de un eje fijo que pasa por su centro; el radio de giro centroidal de su masa es de 15 in. Un cuerpo A de 30 lb cuelga de una cuerda enrollada en el borde del volante y se suelta desde el reposo. Determine: a) la aceleración del cuerpo A; b) la tensión de la cuerda.

Resultado: a) $a_A = 5.66\,\text{ft/s}^2$ hacia abajo; b) $T = 24.7\,\text{lb}$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 104.

Ejercicio propuesto 5.6.2 · Carrete que se desenrolla al caer

Adaptado de: 1er final 2018-2, turno matutino, problema 4

Un carrete de 20 kg, con radio de giro centroidal de 0.25 m, radio exterior de 0.3 m y radio interior de 0.1 m, tiene enrollada en su cubo (radio interior) una cuerda vertical cuyo extremo está fijo en el techo. Se suelta desde el reposo. Determine la longitud de cuerda que se desenrolla en tres segundos.

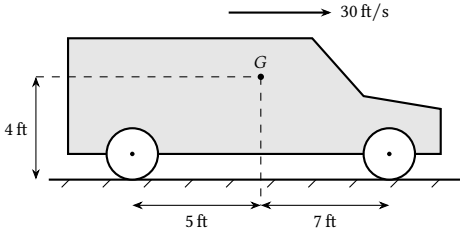
Resultado: $s = 6.09\,\text{m}$ ($\bar{a} = 1.353\,\text{m/s}^2$).

→ Resolución en el Apéndice E, p. 104.

Ejercicio propuesto 5.6.3 · Camioneta que frena con las ruedas bloqueadas

Adaptado de: 1er final 2011-1, versión C, problema 4

Una camioneta de peso P avanza a 30 ft/s cuando se aplican de golpe los frenos y sus cuatro ruedas dejan de girar; patina 20 ft antes de detenerse. Su centro de masa G está a 4 ft del suelo, 7 ft detrás del eje delantero y 5 ft delante del eje trasero. Determine la magnitud de la reacción normal y de la fuerza de fricción en cada rueda.



Resultado: Cada rueda delantera: $N = 0.325P$, $F = 0.227P$; cada rueda trasera: $N = 0.175P$, $F = 0.122P$.

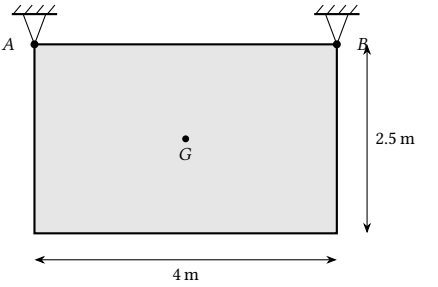
→ Resolución en el Apéndice E, p. 105.

Ejercicio propuesto 5.6.4 · Placa que pierde un pasador

Adaptado de: 1er final 2011-2, versión B, problema 4

Una placa rectangular homogénea de 300 kg, de 4 m de ancho y 2.5 m de alto, cuelga

de dos pasadores A y B en sus esquinas superiores. De pronto se rompe el pasador B. Determine la aceleración angular de la placa y la magnitud de la reacción en el pasador A justo después de romperse el de B.



Resultado: $\alpha = 2.65\,\text{rad/s}^2$ (horario); $R_A = 1680\,\text{N}$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 105.

Ejercicio propuesto 5.6.5 · Esfera que rueda por una pendiente

Adaptado de: 2º final 2018-1, problema 4

Sobre un plano cuya pendiente es $7/24$ se suelta desde el reposo una esfera maciza de 5 kg y 0.2 m de radio. Sabiendo que la esfera rueda sin deslizar, diga qué distancia recorre su centro de masa durante los dos primeros segundos de su movimiento.

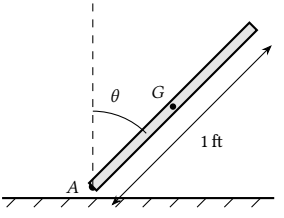
Resultado: $x = 3.92\,\text{m}$ ($\bar{a} = 1.962\,\text{m/s}^2$).

→ Resolución en el Apéndice E, p. 106.

Ejercicio propuesto 5.6.6 · Barra que cae girando alrededor de su base

Adaptado de: 2º final 2008-2, versión A, problema 3

Una barra homogénea y esbelta de masa m y 1 ft de longitud está articulada en su extremo inferior A, sobre el suelo. Se libera del reposo cuando forma un ángulo $\theta = 45°$ con la vertical. Calcule su velocidad angular cuando $\theta = 90°$ (barra horizontal).



Resultado: $\omega = 8.26\,\text{rad/s}$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 106.

5.7 Errores frecuentes

- **Tomar momentos respecto a un punto cualquiera con $\bar{I}\alpha$.** $\sum M = \bar{I}\alpha$ vale respecto a G; respecto a un eje fijo O se usa $I_O = \bar{I} + m\bar{r}^{\,2}$. Respecto a otro punto aparece además el momento de $m\bar{a}$.
- **Olvidar la masa en el teorema de los ejes paralelos** o sumar d^2 a $\bar{k}$: es $I = \bar{I} + md^2$, con $\bar{I} = m\bar{k}^2$.
- **Usar el peso como masa.** Si el dato está en N o en lb, primero $m = W/g$.
- **Suponer que rueda sin comprobar.** Con μ_s y μ_k en el enunciado hay que calcular la fricción necesaria y compararla con $\mu_s N$. El criterio $\mu < \tan\theta$ es el de un bloque, no el de una rueda.
- **Usar $F = \mu N$ cuando rueda sin deslizar.** Si no desliza, la fricción es una incógnita más; solo vale $\mu_k N$ cuando hay deslizamiento.
- **Relaciones cinemáticas mal planteadas en carretes.** En un carrete que sube o baja por una cuerda fija, el centro no está quieto: un punto a una distancia d de esa cuerda tiene $a = d\alpha$, no $r\alpha$.
- **Una sola tensión para dos cuerdas.** En una polea con masa, la tensión cambia de un lado al otro; cada cuerda lleva su T_A, T_B.
- **Normal en el centro de la base en problemas de volcamiento.** En el límite de volcar, la normal está en la arista de giro, y la fricción y la cuerda también hacen momento respecto a G.
- **Olvidar $\bar{a}_n = \bar{r}\omega^2$** al calcular las reacciones de un pasador cuando el cuerpo ya gira.

5.8 Formulario de emergencia de la unidad

Concepto	Expresión
Movimiento plano	$\sum F_x = m\bar{a}_x$, $\sum F_y = m\bar{a}_y$, $\sum M_G = \bar{I}\alpha$
Eje fijo O	$\sum M_O = I_O\alpha$, $I_O = \bar{I} + m\bar{r}^{\,2}$; $\bar{a}_t = \bar{r}\alpha$, $\bar{a}_n = \bar{r}\omega^2$
Traslación	$\alpha = 0$: $\sum M_G = 0$
Radio de giro	$\bar{I} = m\bar{k}^2$; $I = \bar{I} + md^2$
Barra	$\frac{1}{12}mL^2$ (centro), $\frac{1}{3}mL^2$ (extremo)
Disco, aro, esfera	$\frac{1}{2}mr^2$, mr^2, $\frac{2}{5}mr^2$
Placa $a \times b$	$\frac{1}{12}m(a^2 + b^2)$
Rodadura	$\bar{v} = \omega r$, $\bar{a} = \alpha r$, $F \le \mu_s N$; si desliza, $F = \mu_k N$
Rueda en plano	$\bar{a} = g\sin\theta/(1 + \bar{k}^2/r^2)$
Carrete en cuerda fija	$\bar{a} = r_{\text{cubo}}\,\alpha$
Energía	$T = \frac{1}{2}m\bar{v}^2 + \frac{1}{2}\bar{I}\omega^2$; eje fijo: $T = \frac{1}{2}I_O\omega^2$
Trabajo	par: $M\Delta\theta$; $U_{1\to2} = \Delta T + \Delta V_g + \Delta V_e$

5.9 Procedimiento recomendado en el examen

1. Clasifica el movimiento: traslación, rotación con eje fijo o movimiento plano general (tabla de la sección 5.2).
2. Calcula $m = W/g$ y $\bar{I} = m\bar{k}^2$ (o de la tabla); si hay eje fijo, I_O.
3. Dibuja un diagrama de cuerpo libre por cuerpo, con las fuerzas en su punto de aplicación.
4. Escribe las relaciones cinemáticas ($\bar{a} = \alpha r$, $a_A = r_A\alpha$) antes de las ecuaciones de

movimiento.
5. Escribe $\sum F = m\bar{a}$ y $\sum M_G = \bar{I}\alpha$ (o $\sum M_O = I_O\alpha$) con un solo sentido positivo.
6. Si hay fricción con μ_s: supón que rueda y comprueba $F \leq \mu_s N$.
7. Si se pide una rapidez tras un giro, usa energía; si se pide una fuerza en esa posición, regresa a las ecuaciones de movimiento.
8. Da el resultado con unidades y sentido.

Apéndice A · Formulario

Reúne los formularios de emergencia de las cinco unidades. Signos: positivo en el sentido elegido para cada eje y, para giros, positivo en sentido antihorario salvo que se indique otro.

A.1 Cinemática de la partícula (Unidad 1)

Movimiento rectilíneo.

$$v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}, \qquad a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = v\,\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$$

- Uniforme: $x = x_0 + vt$.
- Uniformemente acelerado: $v = v_0 + at$, $x = x_0 + v_0 t + \tfrac{1}{2}at^2$, $v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0)$.
- $a(t)$: integrar $\mathrm{d}v = a\,\mathrm{d}t$. $a(v)$: $\mathrm{d}t = \mathrm{d}v/a$ o $\mathrm{d}x = v\,\mathrm{d}v/a$. $a(x)$: $v\,\mathrm{d}v = a\,\mathrm{d}x$.
- Gráficas: Δv = área bajo a-t; Δx = área bajo v-t; la pendiente de x-t es v y la de v-t es a.
- Encuentro: misma posición en el mismo instante, $x_A(t) = x_B(t)$.

Tiro parabólico (origen en el punto de lanzamiento, y hacia arriba):

$$x = v_0 \cos\theta\, t, \qquad y = v_0 \sin\theta\, t - \tfrac{1}{2}gt^2, \qquad v_y = v_0 \sin\theta - gt$$

$$y = x\tan\theta - \frac{g\,x^2}{2v_0^2\cos^2\theta}, \qquad h_{\text{máx}} = \frac{v_0^2\sin^2\theta}{2g}, \qquad R = \frac{v_0^2 \sin 2\theta}{g} \text{ (mismo nivel)}$$

Componentes normal y tangencial.

$$a_t = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = v\,\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s}, \qquad a_n = \frac{v^2}{\rho}, \qquad a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2}, \qquad \vec{a} = a_t\,\hat{e}_t + a_n\,\hat{e}_n$$

$$\rho = \frac{\left[1 + (\mathrm{d}y/\mathrm{d}x)^2\right]^{3/2}}{|\mathrm{d}^2y/\mathrm{d}x^2|}, \qquad \rho = \frac{v^3}{|\vec{v}\times\vec{a}|}$$

En el punto más alto de un tiro, $a_n = g$ y $\rho = v_x^2/g$.

Movimiento relativo y dependiente. $\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{B/A}$, $\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{B/A}$. Con poleas: la longitud de cada cuerda es constante, $\sum s_i = \text{cte}$, de donde $\sum v_i = 0$ y $\sum a_i = 0$.

A.2 Cinética de la partícula (Unidad 2)

$$\sum \vec{F} = m\vec{a}, \qquad \sum F_x = ma_x, \qquad \sum F_y = ma_y$$

$$\sum F_t = m\,a_t = m\,v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s}, \qquad \sum F_n = m\frac{v^2}{\rho} \text{ (hacia el centro de curvatura)}$$

- Fricción: sin deslizar $F_r \le \mu_s N$; deslizando $F_r = \mu_k N$, opuesta a la velocidad relativa.
- Curva peraltada un ángulo θ sin fricción: $\tan\theta = v^2/(g\rho)$.

- Con fricción, rapidez máxima: $v_{\text{máx}}^2 = g\rho\,\dfrac{\sin\theta + \mu_s\cos\theta}{\cos\theta - \mu_s\sin\theta}$; mínima: cambiar el signo de μ_s, válido si $\mu_s < \tan\theta$; si $\mu_s \geq \tan\theta$, la fricción sostiene el reposo y $v_{\text{mín}} = 0$.
- Despegue de una superficie o tensión nula en una cuerda: $N = 0$ (o $T = 0$).
- Cuerpos conectados: un DCL por cuerpo y la relación de aceleraciones de la cuerda.

A.3 Trabajo y energía (Unidad 3)

$$U_{1\to 2} = \int_1^2 \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{r}, \qquad T = \tfrac{1}{2}mv^2, \qquad V_g = Wy = mgy, \qquad V_e = \tfrac{1}{2}kx^2$$

$$U_{1\to 2} = \Delta T + \Delta V_g + \Delta V_e$$

donde $U_{1\to 2}$ es el trabajo de las fuerzas que no tienen energía potencial (fricción, fuerzas aplicadas) y x es la deformación del resorte, no su longitud.

- Trabajo de la fricción: $U = -\mu_k N\, s$ (por tramos si N o μ_k cambian).
- Conservación: si $U_{1\to 2} = 0$, entonces $T_A + V_A = T_B + V_B$.
- Resorte de longitud natural L_0 entre puntos fijos: $x = L - L_0$, con L calculada con Pitágoras.
- Potencia: $P = \vec{F}\cdot\vec{v}$; eficiencia $\eta = P_{\text{sal}}/P_{\text{ent}}$.

A.4 Impulso y cantidad de movimiento (Unidad 3)

$$m\vec{v}_1 + \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}\,\mathrm{d}t = m\vec{v}_2, \qquad \int F\,\mathrm{d}t = \text{área bajo la gráfica } F\text{-}t, \qquad F_{\text{prom}} = \frac{m\,\Delta v}{\Delta t}$$

- Arranque con fricción: el cuerpo se mueve desde el instante t_0 en que $F(t_0) = \mu_s N$; el impulso se integra desde t_0, con $\mu_k N$.
- Choque de dos partículas (sin fuerzas externas impulsivas): $m_A v_A + m_B v_B = m_A v_A' + m_B v_B'$.
- Coeficiente de restitución: $e = \dfrac{v_B' - v_A'}{v_A - v_B}$; plástico $e = 0$, elástico $e = 1$.
- Energía perdida en el choque: $\Delta T = T_{\text{antes}} - T_{\text{después}}$.

A.5 Cinemática del cuerpo rígido (Unidad 4)

$$\omega = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}, \qquad \alpha = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = \omega\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}\theta}$$

- α constante: $\omega = \omega_0 + \alpha t$, $\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \tfrac{1}{2}\alpha t^2$, $\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha(\theta - \theta_0)$.
- Punto a distancia r del eje: $v = \omega r$, $a_t = \alpha r$, $a_n = \omega^2 r$; $\vec{v} = \vec{\omega}\times\vec{r}$, $\vec{a} = \vec{\alpha}\times\vec{r} - \omega^2\vec{r}$.
- Transmisión (engranes, bandas, contacto sin deslizar), en magnitud: $r_A|\omega_A| = r_B|\omega_B|$ y $r_A|\alpha_A| = r_B|\alpha_B|$. El sentido va aparte: engranes en contacto exterior giran en sentidos opuestos; banda abierta o contacto interior, en el mismo sentido.
- Rodadura sin deslizar: $v_G = \omega r$, $a_G = \alpha r$; el punto de contacto tiene velocidad nula.
- 1 rev = 2π rad; 1 rpm = $2\pi/60$ rad/s.

Movimiento plano general.

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{\omega} \times \vec{r}_{B/A}, \qquad \vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{\alpha} \times \vec{r}_{B/A} - \omega^2 \vec{r}_{B/A}$$

$$\hat{k} \times \hat{\imath} = \hat{\jmath}, \qquad \hat{k} \times \hat{\jmath} = -\hat{\imath}$$

CIR: intersección de las perpendiculares a las velocidades de dos puntos; $v_P = \omega\, r_{P/\mathrm{CIR}}$. El CIR sirve para velocidades, no para aceleraciones.

Movimiento relativo a un sistema que gira (collarín en una barra que gira con Ω):

$$\vec{v}_P = \vec{v}_{P'} + \vec{v}_{P/\mathrm{barra}}, \qquad \vec{a}_P = \vec{a}_{P'} + \vec{a}_{P/\mathrm{barra}} + 2\vec{\Omega} \times \vec{v}_{P/\mathrm{barra}}$$

A.6 Cinética del cuerpo rígido (Unidad 5)

$$\sum F_x = m\bar{a}_x, \qquad \sum F_y = m\bar{a}_y, \qquad \sum M_G = \bar{I}\alpha$$

- Traslación: $\alpha = 0$, así que $\sum M_G = 0$.
- Rotación alrededor de un eje fijo O: $\sum M_O = I_O\alpha$; $\sum F_n = m\bar{r}\omega^2$, $\sum F_t = m\bar{r}\alpha$.
- Momento respecto a un punto cualquiera P: $\sum M_P = \bar{I}\alpha +$ momento de $m\vec{\bar{a}}$ respecto a P.
- Rueda: suponer que no desliza ($\bar{a} = \alpha r$), calcular F_r y comprobar $F_r \le \mu_s N$; si no se cumple, desliza con $F_r = \mu_k N$ y $\bar{a}$, α son independientes.
- Volcamiento contra deslizamiento: vuelca cuando la normal se va a una arista (N aplicada en el borde).

Momentos de inercia (respecto al centro de masa, eje perpendicular al plano del movimiento):

Cuerpo	$\bar{I}$
Barra delgada de longitud L	$\frac{1}{12}mL^2$ (por un extremo: $\frac{1}{3}mL^2$)
Disco o cilindro macizo de radio r	$\frac{1}{2}mr^2$
Aro o cilindro hueco de pared delgada	mr^2
Esfera maciza	$\frac{2}{5}mr^2$
Esfera hueca de pared delgada	$\frac{2}{3}mr^2$
Placa rectangular $a \times b$	$\frac{1}{12}m(a^2 + b^2)$

$$I = \bar{I} + md^2 \text{ (ejes paralelos)}, \qquad I = mk^2, \quad \bar{I} = m\bar{k}^2 \text{ (radio de giro)}$$

Energía del cuerpo rígido.

$$T = \tfrac{1}{2}m\bar{v}^2 + \tfrac{1}{2}\bar{I}\omega^2 = \tfrac{1}{2}I_O\omega^2 \text{ (eje fijo } O), \qquad U_{1\to 2} = \Delta T + \Delta V_g + \Delta V_e$$

Trabajo de un par constante: $U = M\,\Delta\theta$. La fricción en el punto de contacto de una rueda que no desliza no trabaja.

A.7 Constantes y conversiones

Magnitud	Valor
Gravedad	$g = 9.81\,\mathrm{m/s^2} = 32.2\,\mathrm{ft/s^2}$
Longitud	$1\,\mathrm{ft} = 12\,\mathrm{in} = 0.3048\,\mathrm{m}$; $1\,\mathrm{mi} = 5280\,\mathrm{ft} = 1609\,\mathrm{m}$
Fuerza	$1\,\mathrm{lb} = 4.448\,\mathrm{N}$; $1\,\mathrm{kgf} = 9.81\,\mathrm{N}$
Masa	$1\,\mathrm{slug} = 1\,\mathrm{lb\,s^2/ft} = 14.59\,\mathrm{kg}$; $m = W/g$
Rapidez	$1\,\mathrm{km/h} = \frac{1}{3.6}\,\mathrm{m/s}$; $1\,\mathrm{mi/h} = 1.4667\,\mathrm{ft/s}$
Potencia	$1\,\mathrm{hp} = 550\,\mathrm{ft\,lb/s} = 745.7\,\mathrm{W}$
Ángulo	$1\,\mathrm{rev} = 2\pi\,\mathrm{rad}$; $1\,\mathrm{rpm} = 0.104\,72\,\mathrm{rad/s}$

Apéndice B · Exámenes completos

B.1 Qué vino en cada examen

Los 53 exámenes publicados de 2007-2 a 2018-2, agrupados por aplicación. Para cada problema se indica el tema y, entre corchetes, la unidad (U1 a U5) y, si está en este cuaderno, el ejemplo, ejercicio resuelto o ejercicio propuesto donde se trabaja. Las versiones del mismo examen suelen ser el mismo problema con otros datos: si una versión está resuelta en el cuaderno, la otra se puede usar como práctica con el mismo procedimiento.

1er final 2007-2

- **Versión única:** (1) tiro parabólico, componentes normal y tangencial [U1]; (2) trabajo y energía con resorte [U3]; (3) polea doble con cuerpos colgantes [U5].

2º final 2007-2

- **Versión única:** (1) encuentro de dos tiros [U1]; (2) collarín con resorte [U3]; (3) polea doble con cuerpos colgantes [U5].

1er final 2008-1

- **Versión A:** (1) impulso con fuerza variable y fricción [U3]; (2) tiro vertical con viento [U1]; (3) caja en banda (traslación) [U5].
- **Versión B:** (1) impulso con fuerza variable y fricción [U3]; (2) tiro parabólico, normal y tangencial [U1]; (3) caja empujada (traslación) [U5].

2º final 2008-1

- **Versión A:** (1) frenado, coeficiente de fricción [U2]; (2) péndulo simple [U2 y U3]; (3) placa colgada de barras (traslación curvilínea) [U5].
- **Versión B:** (1) plano inclinado con fricción [U2]; (2) collarín con resorte [U3]; (3) cilindro que rueda con cuerda y cuerpo [U5].

1er final 2008-2

- **Versión A:** (1) segunda ley con fricción [U2]; (2) collarines con resorte [U3]; (3) disco con cuerpo colgante [U5].
- **Versión B:** (1) impulso y cantidad de movimiento [U3]; (2) collarín con resorte [U3]; (3) disco que rueda sin deslizar [U5].

2º final 2008-2

- **Versión A:** (1) partículas conectadas con poleas [U2]; (2) collarín entre resortes [U3]; (3) barra liberada (rotación) [U5; propuesto 5.6.6].
- **Versión B:** (1) bloques con fricción [U2]; (2) movimiento relativo de automóviles [U1; propuesto 1.6.6]; (3) collarines con resorte [U3].

1er final 2009-1

- **Versión A:** (1) plano inclinado y tiro parabólico [U2]; (2) automóvil, aceleración máxima (traslación) [U5]; (3) trabajo y energía con fricción y resorte [U3].
- **Versión B:** (1) partículas conectadas con fricción [U2]; (2) collarín con tres resortes [U3]; (3) aro: ¿rueda o desliza? [U5].

1er final 2009-2

- **Versión A:** (1) caída libre [U1]; (2) péndulo, componente tangencial y tensión [U2]; (3) impulso con fuerza variable [U3]; (4) barra con fuerza y par [U5; ejercicio 5.5.8].

- **Versión B:** (1) distancia de frenado en rampa [U2; ejercicio 2.5.1]; (2) tobogán y tiro parabólico [U3; ejercicio 3.5.4]; (3) impulso promedio [U3; propuesto 3.6.5]; (4) mecanismo manivela-biela-corredera [U4].

2º final 2009-2

- **Versión A:** (1) impulso con fuerza variable [U3]; (2) tobogán circular, normal [U2]; (3) cuerda elástica [U3; propuesto 3.6.2]; (4) esfera: ¿rueda o desliza? [U5; ejercicio 5.5.5].
- **Versión B:** (1) gráfica v-t, curvas a-t y x-t [U1]; (2) juego giratorio, tensión [U2; ejercicio 2.5.7]; (3) poleas con aceleración angular variable [U4]; (4) barra articulada liberada [U5].

Extraordinario 2009-2

- **Versión única:** (1) aceleración función del tiempo [U1; propuesto 1.6.2]; (2) plano inclinado con fricción [U2]; (3) impulso con fuerza variable [U3]; (4) manivela-biela-corredera [U4].

2º final 2010-1

- **Versión A:** (1) movimiento dependiente con poleas [U1; ejercicio 1.5.8]; (2) gráfica de rapidez en rampa [U1]; (3) resorte y cuerpos conectados [U3]; (4) barra que desliza en piso y pared [U5].
- **Versión B:** (1) bloques con fricción [U2; ejercicio 2.5.3]; (2) pista circular, normal [U2]; (3) impulso con fuerza variable y fricción [U3; propuesto 3.6.4]; (4) barra colgada de cuerdas (traslación curvilínea) [U5].

1er final 2011-1

- **Versión A:** (1) movimiento rectilíneo con gráfica a-t [U1]; (2) cinética curvilínea (volantín) [U2; propuesto 2.6.5]; (3) placa con extremos en guías [U4]; (4) camioneta remolcada (traslación) [U5].
- **Versión B:** (1) radio de curvatura [U1]; (2) impulso con fuerza variable [U3]; (3) poleas con aceleración angular variable [U4; propuesto 4.6.1]; (4) barra articulada (rotación) [U5].
- **Versión C:** (1) tiro horizontal desde avión [U1]; (2) trabajo y energía con resorte [U3]; (3) manivela-biela-corredera [U4; propuesto 4.6.3]; (4) camioneta frenando (traslación) [U5; propuesto 5.6.3].

1er final 2011-2

- **Versión A:** (1) movimiento rectilíneo por tramos [U1]; (2) trabajo y energía con resorte [U3]; (3) mecanismo de cuatro articulaciones [U4]; (4) péndulo compuesto (rotación) [U5].
- **Versión B:** (1) aceleración función de la velocidad [U1; ejercicio 1.5.2]; (2) trabajo y energía con resortes [U3]; (3) barra en ranuras guiadas [U4; ejercicio 4.5.6]; (4) placa suspendida, pasador roto (rotación) [U5; propuesto 5.6.4].
- **Versión C:** (1) tiro vertical [U1]; (2) impulso (motociclista) [U3; ejemplo 3.4]; (3) engrane y cremallera [U4; ejercicio 4.5.3]; (4) bloque que desliza sin volcar (traslación) [U5; ejercicio 5.5.2].

1er final 2012-1

- **Versión A:** (1) partículas conectadas [U2]; (2) bloque remolcado con fricción [U2]; (3) trabajo y energía con resorte [U3]; (4) cilindro que rueda sin deslizar [U5].
- **Versión B:** (1) tiro horizontal sobre ladera [U1]; (2) frenado de embarcación [U3]; (3) impulso con fuerza variable y fricción [U3; ejercicio 3.5.7]; (4) volante que rueda, momento de inercia [U5].

2º final 2012-1

- **Versión única:** (1) cuerpos conectados con fricción [U2; propuesto 2.6.2]; (2) péndulo, tensión [U2 y U3; propuesto 2.6.6]; (3) cono en rotación [U4]; (4) disco con cuerpo colgante [U5].

1er final 2012-2

- **Versión A:** (1) tiro parabólico entre planos [U1]; (2) automóvil y remolque frenando [U2; ejercicio 2.5.2]; (3) barra con extremos guiados [U4]; (4) placa colgada de barras (traslación curvilínea) [U5; ejercicio 5.5.3].
- **Versión B:** (1) conservación de la energía [U3]; (2) trabajo y energía con fricción [U3]; (3) disco unido a barras [U4]; (4) cilindro con cuerpo colgante [U5].

- **Versión C:** (1) superficie circular, punto de despegue [U2 y U3]; (2) paquetes en plano inclinado [U3]; (3) fuerza constante para detener [U3]; (4) cilindro que rueda con cuerda [U5].

1er final 2013-1

- **Versión A:** (1) movimiento uniformemente acelerado [U1]; (2) componentes normal y tangencial en circunferencia [U1; ejercicio 1.5.7]; (3) trabajo y energía con fricción [U3]; (4) collarín en brazo giratorio [U4].
- **Versión B:** (1) movimiento uniformemente acelerado [U1]; (2) tiro parabólico sobre terreno curvo [U1; ejercicio 1.5.6]; (3) trabajo y energía con resorte y fricción [U3]; (4) collarín en brazo giratorio [U4; ejercicio 4.5.5].

2º final 2013-1

- **Versión única:** (1) frenado en curva, fuerza de fricción [U2; propuesto 2.6.3]; (2) trabajo y energía (atracción acuática) [U3]; (3) mecanismo de cuatro articulaciones [U4; propuesto 4.6.4]; (4) cilindros que ruedan en plano inclinado [U5].

1er final 2013-2

- **Versión A:** (1) fuerza variable con fricción (impulso) [U3; ejercicio 3.5.6]; (2) montaña rusa, fuerza normal [U2 y U3]; (3) mecanismo de cuatro articulaciones [U4]; (4) caja sobre plataforma acelerada (volcamiento) [U5].

1er final 2014-2

- **Versión A:** (1) dos cuerpos en plano inclinado [U2]; (2) resbaladilla circular, despegue [U2 y U3; ejercicio 2.5.8]; (3) trabajo y energía con resorte [U3]; (4) cilindro que rueda con cuerpo colgante [U5].
- **Versión B:** (1) alcance entre dos vehículos [U1; ejercicio 1.5.1]; (2) tiro horizontal sobre pendiente [U1; ejercicio 1.5.5]; (3) placa en rotación pura [U4]; (4) engranes con par [U5].
- **Versión C:** (1) tiro parabólico [U1]; (2) bastidor giratorio, rapidez máxima [U2]; (3) resortes y caída [U3]; (4) disco ranurado con cuerpo colgante [U5].
- **Versión D:** (1) tiro parabólico desde rampa [U1]; (2) componentes normal y tangencial en curva vertical [U1]; (3) choque, cantidad de movimiento y fricción [U3; propuesto 3.6.6]; (4) cilindro con cuerpo en plano inclinado [U5].

1er final 2015-1

- **Versión A:** (1) caída y camión acelerado [U1; ejercicio 1.5.4]; (2) trabajo y energía con resorte [U3; ejercicio 3.5.1]; (3) discos en contacto, velocidades y aceleraciones [U4; ejercicio 4.5.4]; (4) viga izada sin girar (traslación) [U5; ejercicio 5.5.1].
- **Versión B:** (1) alcance entre vehículos [U1; propuesto 1.6.3]; (2) tiro parabólico, dos ángulos [U1]; (3) collarín con resorte [U3]; (4) barra que gira (rotación) [U5; ejercicio 5.5.4].
- **Versión C:** (1) movimiento uniformemente acelerado [U1]; (2) trabajo y energía con resorte y fricción [U3]; (3) mecanismo, velocidades angulares [U4]; (4) rueda unida a cuerpo en plano inclinado [U5].
- **Versión D:** (1) movimiento uniformemente acelerado [U1; propuesto 1.6.1]; (2) trabajo y energía, cuerpos conectados [U3]; (3) resorte y tiro parabólico [U3]; (4) mecanismo, velocidades angulares [U4].

1er final 2015-2

- **Versión A:** (1) cuerpos conectados con fricción [U2; ejercicio 2.5.5]; (2) esquiador en curva [U2 y U3]; (3) rodadura de bicicleta [U4; propuesto 4.6.2]; (4) cilindro sobre dos planos (reacciones y alfa) [U5].
- **Versión B:** (1) péndulo, tensión [U2 y U3; ejercicio 2.5.6]; (2) resortes y bucles [U3; ejercicio 3.5.3]; (3) banda y poleas, alfa función de omega [U4; ejercicio 4.5.2]; (4) carrete con fricción [U5; ejercicio 5.5.6].

- **Versión C:** (1) tiro desde rampa [U1]; (2) persecución [U1]; (3) resortes y trayectoria [U3]; (4) barra y disco con fricción [U5].

2º final 2015-2

- **Versión única:** (1) cuerpos conectados, energía [U3; ejercicio 3.5.5]; (2) resorte en tubo [U3; ejercicio 3.5.2]; (3) placa con aceleración angular variable [U4; ejercicio 4.5.1]; (4) carrete con cuerpo colgante [U5; ejercicio 5.5.7].

1er final 2018-1

- **Turno matutino:** (1) componentes normal y tangencial en pista circular [U1; ejemplo 1.4]; (2) cuerpos conectados con fricción [U2; ejercicio 2.5.4]; (3) mecanismo de cuatro articulaciones [U4; ejemplo 4.4]; (4) polea doble con cuerpos colgantes [U5; ejemplo 5.4].
- **Turno vespertino:** (1) tiro parabólico [U1; propuesto 1.6.5]; (2) trabajo y energía, cuerpos conectados [U3; propuesto 3.6.3]; (3) mecanismo de cuatro articulaciones [U4]; (4) volante con cuerpo colgante [U5; propuesto 5.6.1].

2º final 2018-1

- **Versión única:** (1) persecución en línea recta [U1]; (2) trabajo y energía con fricción por tramos [U3; ejemplo 3.4]; (3) barra con collarín y perno en ranura [U4; propuesto 4.6.5]; (4) esfera que rueda sin deslizar [U5; propuesto 5.6.5].

1er final 2018-2

- **Turno matutino:** (1) gráfica v-t de ascensor [U1; propuesto 1.6.4]; (2) curva peraltada con fricción [U2; ejemplo 2.4]; (3) resorte en plano inclinado [U3; propuesto 3.6.1]; (4) carrete que se desenrolla [U5; propuesto 5.6.2].
- **Turno vespertino:** (1) gráfica a-t [U1; ejercicio 1.5.3]; (2) trayectoria circular, fuerza normal [U2 y U3; propuesto 2.6.4]; (3) choque con pérdida de energía [U3; ejercicio 3.5.8]; (4) mecanismo articulado [U4].

2º final 2018-2

- **Versión única:** (1) movimiento uniformemente acelerado [U1]; (2) plano inclinado con fricción [U2; propuesto 2.6.1]; (3) collarín y varilla, velocidades [U4; ejercicio 4.5.7]; (4) disco frenado por barra con fricción [U5].

B.2 Tres exámenes completos para simulacro

Resuelve cada uno en 2 horas, sin consultar y con el formulario del Apéndice A escrito de memoria en una hoja aparte. Después califícate con las resoluciones del cuaderno.

Simulacro 1: 1er final 2015-1, versión A

1. Cinemática de la partícula: bolsa que cae sobre un camión que acelera. Resuelto en el ejercicio 1.5.4.
2. Trabajo y energía: bloque que se desliza con fricción y comprime un resorte. Resuelto en el ejercicio 3.5.1.
3. Cinemática del cuerpo rígido: dos discos en contacto unidos a barras. Resuelto en el ejercicio 4.5.4.
4. Cinética del cuerpo rígido: viga que se iza sin girar (traslación). Resuelto en el ejercicio 5.5.1.

Simulacro 2: segundo final 2015-2

1. Trabajo y energía: cuerpos conectados con una polea móvil. Resuelto en el ejercicio 3.5.5.
2. Conservación de la energía: esfera que cae, entra en un tubo en U y comprime un resorte. Resuelto en el ejercicio 3.5.2.
3. Cinemática del cuerpo rígido: placa con aceleración angular variable. Resuelto en el ejercicio 4.5.1.
4. Cinética del cuerpo rígido: carrete que cuelga de su cubo con un cuerpo colgante. Resuelto en el ejercicio 5.5.7.

Simulacro 3: 1er final 2018-1, turno matutino

1. Cinemática de la partícula: corredor que acelera en una pista circular. Resuelto en el ejemplo 1.4.
2. Cinética de la partícula: dos cuerpos conectados con fricción. Resuelto en el ejercicio 2.5.4.
3. Cinemática del cuerpo rígido: mecanismo de cuatro articulaciones. Resuelto en el ejemplo 4.4.
4. Cinética del cuerpo rígido: polea doble con dos cuerpos colgantes. Resuelto en el ejemplo 5.4.

Como cuarto simulacro sirve cualquier otra versión de estos mismos exámenes (por ejemplo el 1er final 2015-1, versiones B a D, o el turno vespertino de 2018-1), que el cuaderno no resuelve completos.

Apéndice C · Fe de erratas

Diferencias entre las resoluciones publicadas de los exámenes y los valores verificados en este cuaderno.

C.1 · Unidad 1 · Cinemática de la partícula: rectilíneo, tiro parabólico y componentes normal y tangencial

1er final 2011-2, versión B, problema 1: La resolución publicada integra $a = -0.15v^2$ en lugar de $a = -15v^2$ del enunciado y obtiene $s = 22.2$ in, $v = 1.286$ in/s, $a = -0.248$ in/s^2; con el dato del enunciado, los valores verificados son $s = 0.527$ in, $v = 0.0133$ in/s, $a = -0.002\,66$ in/s^2.

1er final 2015-1, versión A, problema 1: En la resolución publicada aparece $R = 50t$ y $a = 54.3$ ft/s^2; con la velocidad horizontal de 5 ft/s del enunciado, $R = 5t$ y el valor verificado es $a = 4.07$ ft/s^2.

1er final 2013-1, versión A, problema 2: En la resolución publicada aparece $\ddot{s} = 48.74$ ft/s^2 en B y, en consecuencia, $a_B = 538$ ft/s^2 a 50.2°; con $a_t = 3t^2$, el valor verificado es $a_t = 73.1$ ft/s^2 y $a_B = 541$ ft/s^2 a 52.8° sobre la horizontal.

Extraordinario 2009-2, problema 1: En la resolución publicada aparece $x = 0.858 \times 10^{-3}t^4 + 7t + 36$ y k en m/s^4; el valor verificado del coeficiente es $k/12 = 6.859 \times 10^{-3}$ ft/s^4 (con el valor publicado, $x(9) \neq 144$ ft).

1er final 2018-1, turno vespertino, problema 1: En la resolución publicada se usa una altura de lanzamiento de 1.5 m y aparece $v_0 = 6.45$ ft/s a 59.7°; con la altura de 1.2 m de la figura del enunciado y en las unidades de los datos, el valor verificado es $v_0 = 6.66$ m/s a 60.8°.

C.2 · Unidad 2 · Cinética de la partícula: segunda ley con fricción, cuerpos conectados y movimiento curvilíneo

1er final 2018-2, turno matutino, problema 2: En la resolución publicada aparece $\phi = \arctan 0.4 = 21.30°$ y $v = 200$ km/h; el valor verificado es $\phi = 21.80°$ y $v = 201.5$ km/h (la diferencia en la rapidez es menor que 1 %).

1er final 2012-2, versión A, problema 2: En la resolución publicada aparece $F = 500g/1.5 = 6540$ N; el valor verificado es $F = 500(9.81)/1.5 = 3270$ N (error aritmético en la última división).

1er final 2015-2, versión A, problema 1: En la resolución publicada aparece $T = 59.84g - 400a_B$, $a_B = 1.126$ m/s^2 y $v_A = 4.24$ m/s; el valor verificado es $T = 44.0g - 400a_B$, $a_B = 0.749$ m/s^2 y $v_A = 3.46$ m/s (la fricción se tomó como $0.2(0.8g)$ en lugar de $0.2(80g)$).

2° final 2009-2, versión B, problema 2: En la resolución publicada aparece $\omega = 2.09$ rad/s, calculada con un radio de giro de 1.3 m; el valor verificado es $\omega = 2.84$ rad/s, con $r = 0.3 + 0.8 \sin 30° = 0.7$ m según las cotas de la figura. La tensión, 577 N, es correcta.

C.3 · Unidad 3 · Trabajo y energía, impulso y cantidad de movimiento de la partícula

2º final 2015-2, problema 2: En la resolución publicada aparece $H = 26.7$ cm; el valor verificado es $H = 20 + 6250/981 = 26.4$ cm. La rapidez publicada en P, 227 cm/s, sí corresponde a 26.4 cm.

1er final 2012-1, versión B, problema 3: En la resolución publicada aparece $t = 93.4$ s; el valor verificado es $t = 93.9$ s. La resolución publicada toma la fuerza neta como cero en el arranque ($t = 0.5$ s), pero en ese instante la fricción pasa de 25 N (estática) a 20 N (cinética) y la fuerza neta vale 5 N; el impulso neto hasta 10 s es 1678.8 N s, no 1667.5 N s.

1er final 2018-2, turno vespertino, problema 3: En la resolución publicada las velocidades aparecen en ft/s; los datos están en m/s, así que los valores verificados son 1.377 m/s y 0.123 m/s (los números coinciden; solo cambian las unidades).

1er final 2018-2, turno matutino, problema 3: En la resolución publicada aparece 4.74 m/s para la rapidez al llegar al suelo; el valor verificado es 4.80 m/s. La energía del resorte (0.015 J) se devuelve al cuerpo y debe sumarse, no restarse.

C.4 · Unidad 4 · Cinemática del cuerpo rígido: rotación, rodadura y mecanismos

1er final 2018-1, turno matutino, problema 3: La resolución publicada usa $\omega_{AB} = 2.5$ rad/s ($v_B = 2$ m/s) en lugar de los 10 rad/s del enunciado, y obtiene $\omega_{BC} = 2.5$ rad/s, $\omega_{CD} = 5$ rad/s, $\alpha_{BC} = 14.43$ rad/s^2 y $\alpha_{CD} = 36.1$ rad/s^2. Con 10 rad/s los valores verificados son 10 rad/s, 20 rad/s, 230.9 rad/s^2 y 577.4 rad/s^2 (las velocidades escalan por 4 y las aceleraciones por 16); los sentidos no cambian.

1er final 2015-2, versión A, problema 3: En la resolución publicada se toma el radio como 0.5 m (es el diámetro) y se obtiene $\omega = 20$ rad/s; con $r = 0.25$ m el valor verificado es $\omega = 40$ rad/s. Las velocidades pedidas ($v_A = 20$ m/s, $v_B = 10$ m/s, $v_O = 0$) no cambian.

2º final 2018-1, problema 3: En la resolución publicada aparece $\omega_{AB} = 5.77$ rad/s; el valor verificado es $\omega_{AB} = 0.577$ rad/s (8/13.86, con el CIR a 13.86 ft de A). La velocidad de B publicada, 6.93 ft/s, es correcta.

C.5 · Unidad 5 · Cinética del cuerpo rígido: traslación, rotación y movimiento plano general

2º final 2009-2, versión A, problema 4: En la resolución publicada se decide que la esfera desliza comparando $\mu = 0.15$ con $\tan 30°$, que es el criterio de un bloque, y se rotula $N = 63.7$ N. La normal es 424.8 N y 63.7 N es la fricción. El criterio para la esfera es $\mu_s \geq \frac{2}{7}\tan 30° = 0.165$; como $0.15 < 0.165$, la conclusión (desliza) y los valores $\bar{a} = 3.63$ m/s^2, $\alpha = 3.19$ rad/s^2 y $F = 63.7$ N son correctos.

2º final 2015-2, problema 4: En la resolución publicada la aceleración del cuerpo de 25 N se toma como 0.375α. Como el centro del carrete sube 0.075α mientras gira, el cuerpo

baja $(0.375 - 0.075)\alpha = 0.3\alpha$. Con esa relación, $\alpha = 5.23\,\mathrm{rad/s^2}$, la tensión es 21.0 N y $\bar{a} = 0.392\,\mathrm{m/s^2}$ (publicado: $4.85\,\mathrm{rad/s^2}$, 20.4 N y $0.364\,\mathrm{m/s^2}$).

1er final 2011-1, versión C, problema 4: En la resolución publicada se encierra como resultado $N_A = 0.235P$, pero la expresión de la que sale, $(5 + 2.795)P/24$, vale $0.325P$, que es el valor que la misma resolución usa después (fricción $0.227P$).

1er final 2011-2, versión B, problema 4: En la resolución publicada se usa $\bar{I} = 117.9\,\mathrm{kg\,m^2}$; el momento de inercia centroidal de la placa es $\frac{1}{12}(300)(4^2 + 2.5^2) = 556.3\,\mathrm{kg\,m^2}$. Con ese valor, $\alpha = 2.65\,\mathrm{rad/s^2}$ y $R_A = 1680\,\mathrm{N}$ (publicado: $3.29\,\mathrm{rad/s^2}$ y 1572 N).

2º final 2018-1, problema 4: En la resolución publicada el momento de inercia respecto al punto de contacto se escribe $\frac{2}{5}m + 0.2^2 m = 0.44m$; falta el factor $r^2 = 0.04$ en el primer término. El valor correcto es $\frac{7}{5}mr^2 = 0.28\,\mathrm{kg\,m^2}$, con el que $\alpha = 9.81\,\mathrm{rad/s^2}$, $\bar{a} = 1.962\,\mathrm{m/s^2}$ y la distancia es 3.92 m (publicado: 0.99 m).

Apéndice D · Fuentes

Programa de la asignatura

Programa de estudio de *Cinemática y Dinámica* (clave 0066, tercer semestre, 9 créditos), Facultad de Ingeniería, UNAM, aprobado por su Consejo Técnico el 19 de noviembre de 2008. De él se tomaron el orden de las unidades, el objetivo del curso y el objetivo literal de cada unidad.

Exámenes

Exámenes finales colegiados y extraordinario de la asignatura publicados con su resolución, de 2007-2 a 2018-2: 38 primeros finales, 14 segundos finales y 1 extraordinario, que corresponden a 27 aplicaciones distintas y suman 200 problemas. En cada ejercicio de este cuaderno se cita el examen del que se adaptó con la forma «1er final 2015-1, versión A, problema 3». Los enunciados están redactados de nuevo, las figuras están redibujadas y las resoluciones son propias.

Periodo	Examen	Versiones	Problemas
2007-2	1er final	única	3
2007-2	2º final	única	3
2008-1	1er final	A, B	3
2008-1	2º final	A, B	3
2008-2	1er final	A, B	3
2008-2	2º final	A, B	3
2009-1	1er final	A, B	3
2009-2	1er final	A, B	4
2009-2	2º final	A, B	4
2009-2	Extraordinario	única	4
2010-1	2º final	A, B	4
2011-1	1er final	A, B, C	4
2011-2	1er final	A, B, C	4
2012-1	1er final	A, B	4
2012-1	2º final	única	4
2012-2	1er final	A, B, C	4
2013-1	1er final	A, B	4
2013-1	2º final	única	4
2013-2	1er final	A	4
2014-2	1er final	A, B, C, D	4
2015-1	1er final	A, B, C, D	4
2015-2	1er final	A, B, C	4
2015-2	2º final	única	4
2018-1	1er final	turnos matutino y vespertino	4
2018-1	2º final	única	4
2018-2	1er final	turnos matutino y vespertino	4
2018-2	2º final	única	4

Duración: dos horas y media hasta 2012-2 y dos horas desde 2013-1 (el extraordinario de 2009-2 ya era de dos horas).

Bibliografía del programa

Básica

- Beer, F. P., Johnston, E. R. y Clausen, W. E. *Mecánica vectorial para ingenieros. Dinámica*, 8.ª ed. México: McGraw-Hill, 2007.
- Meriam, J. L. y Kraige, L. G. *Mecánica para ingenieros. Dinámica*, 3.ª ed. Barcelona: Reverté, 2000.
- Hibbeler, R. C. *Mecánica vectorial para ingenieros. Dinámica*, 10.ª ed. México: Pearson Prentice Hall, 2004.

Complementaria

- Riley, W. F. *Ingeniería mecánica. Dinámica*. Barcelona: Reverté, 2004.
- Bedford, A. y Fowler, W. L. *Mecánica para ingeniería. Dinámica*, 5.ª ed. México: Pearson Educación, 2008.
- Boresi, A. P. y Schmidt, R. J. *Ingeniería mecánica. Dinámica*. México: Thomson, 2001.

La notación de este cuaderno (componentes normal y tangencial, $U_{1\to2} = \Delta T + \Delta V$, $\sum M_G = \bar{I}\alpha$, radio de giro $\bar{k}$) es la de las resoluciones publicadas de los exámenes.

Apéndice E · Resoluciones de los ejercicios propuestos

E.1 · Unidad 1 · Cinemática de la partícula: rectilíneo, tiro parabólico y componentes normal y tangencial

Ejercicio 1.6.1 · Tren que frena ← volver

Datos. $v_0 = 60\,\text{mi/h} = 88\,\text{ft/s}$; $v = 0$; $\Delta x = 250\,\text{ft}$.

Planteamiento. Aceleración constante; sin t: $v^2 = v_0^2 + 2a\Delta x$.

Resolución. a) $0 = 88^2 + 2a(250) \Rightarrow a = -7744/500 = -15.49\,\text{ft/s}^2$. b) $0 = 88 - 15.49\,t \Rightarrow t = 5.68\,\text{s}$.

Resultado. a) $15.49\,\text{ft/s}^2$ en sentido contrario al movimiento; b) 5.68 s.

Ejercicio 1.6.2 · Aceleración proporcional al cuadrado del tiempo ← volver

Datos. $a = kt^2$; $x(0) = 36\,\text{ft}$; $x(9) = 144\,\text{ft}$; $v(9) = 27\,\text{ft/s}$.

Planteamiento. Aceleración función del tiempo con constante desconocida: se integra con constantes y se usan las tres condiciones.

Resolución. $v = \frac{1}{3}kt^3 + C$; $x = \frac{1}{12}kt^4 + Ct + 36$. Condiciones en $t = 9$:

$$243k + C = 27, \qquad 546.75k + 9C = 108.$$

Sustituyendo $C = 27 - 243k$: $546.75k + 243 - 2187k = 108$, de donde $k = 20/243 = 0.082\,30\,\text{ft/s}^4$ y $C = 7\,\text{ft/s}$. Comprobación: $x(9) = 0.006859(6561) + 63 + 36 = 144$.

Resultado. $v = 0.02743\,t^3 + 7$ [ft/s]; $x = 0.006859\,t^4 + 7t + 36$ [ft].

Ejercicio 1.6.3 · Patrulla que arranca dos segundos después ← volver

Datos. Retraso 2 s; $a_P = 5\,\text{m/s}^2$; $v_P = 180\,\text{km/h} = 50\,\text{m/s}$; tramo uniforme de 12 s.

Planteamiento. Persecución con reloj en el instante en que el auto pasa junto a la patrulla.

Resolución. Tramo acelerado: $t = 50/5 = 10\,\text{s}$, $x = \frac{1}{2}(5)(10)^2 = 250\,\text{m}$. Tramo uniforme: $50(12) = 600\,\text{m}$. Total 850 m. El auto recorre esos 850 m en $2+10+12 = 24\,\text{s}$: $v = 850/24 = 35.42\,\text{m/s} = 127.5\,\text{km/h}$.

Resultado. 850 m; 127.5 km/h.

Ejercicio 1.6.4 · Ascensor con gráfica velocidad-tiempo ← volver

Datos. Gráfica v-t trapecial: $(0,0)$, $(5,1.2)$, $(10,1.2)$, $(15,0)$.

Planteamiento. El desplazamiento es el área bajo la v-t; la aceleración es la pendiente.

Resolución. Área $= \frac{1}{2}(5)(1.2) + 5(1.2) + \frac{1}{2}(5)(1.2) = 3 + 6 + 3 = 12\,\text{m}$. Pendientes: $1.2/5 = 0.24\,\text{m/s}^2$, 0 y $-0.24\,\text{m/s}^2$.

Resultado. Distancia 12 m; aceleración máxima $0.24\,\text{m/s}^2$ (en magnitud, al arrancar y al frenar).

Ejercicio 1.6.5 · Pelota lanzada contra una pared ← volver

Datos. $y_A = 1.2\,\text{m}$; $x_B = 4\,\text{m}$; $y_B = 0.93\,\text{m}$; $t = 1.23\,\text{s}$; $g = 9.81\,\text{m/s}^2$.

Planteamiento. Tiro parabólico con origen en el suelo bajo A: $x = v_{x0}t$, $y = 1.2 + v_{y0}t - 4.905t^2$.

Resolución. $v_{x0} = 4/1.23 = 3.252\,\text{m/s}$. $0.93 = 1.2 + 1.23\,v_{y0} - 4.905(1.23)^2 \Rightarrow v_{y0} = (0.93 - 1.2 + 7.421)/1.23 = 5.814\,\text{m/s}$. $v_0 = \sqrt{3.252^2 + 5.814^2} = 6.66\,\text{m/s}$; $\theta = \tan^{-1}(5.814/3.252) = 60.8^\circ$.

Resultado. $v_0 = 6.66\,\text{m/s}$ a 60.8° sobre la horizontal.

Ejercicio 1.6.6 · Velocidad y aceleración relativas de dos autos ← volver

Datos. $v_B = 65\,\text{km/h}$, $a_B = 1200\,\text{km/h}^2$ (a la derecha); $v_A = 20\,\text{km/h}$ constante; $\rho = 100\,\text{m} = 0.1\,\text{km}$.

Planteamiento. Movimiento relativo con ejes que se trasladan con B: $\vec{v}_{A/B} = \vec{v}_A - \vec{v}_B$, $\vec{a}_{A/B} = \vec{a}_A - \vec{a}_B$. Como A no cambia de rapidez, solo tiene $a_n = v_A^2/\rho$ hacia C.

Resolución. $\vec{v}_A = 20(\cos 135^\circ\,\hat{\imath} + \sin 135^\circ\,\hat{\jmath}) = -14.14\,\hat{\imath} + 14.14\,\hat{\jmath}$; $\vec{v}_B = 65\,\hat{\imath}$:

$$\vec{v}_{A/B} = -79.14\,\hat{\imath} + 14.14\,\hat{\jmath}, \quad v_{A/B} = 80.4\,\text{km/h}, \quad \tan^{-1}\tfrac{14.14}{79.14} = 10.1^\circ.$$

$a_A = 20^2/0.1 = 4000\,\text{km/h}^2$ a 45° (hacia C): $\vec{a}_A = 2828\,\hat{\imath} + 2828\,\hat{\jmath}$.

$$\vec{a}_{A/B} = 1628\,\hat{\imath} + 2828\,\hat{\jmath}, \quad a_{A/B} = 3264\,\text{km/h}^2, \quad \tan^{-1}\tfrac{2828}{1628} = 60.1^\circ.$$

Resultado. $v_{A/B} = 80.4\,\text{km/h}$, a la izquierda y 10.1° hacia arriba; $a_{A/B} = 3264\,\text{km/h}^2$, a la derecha y 60.1° hacia arriba.

E.2 · Unidad 2 · Cinética de la partícula: segunda ley con fricción, cuerpos conectados y movimiento curvilíneo

Ejercicio 2.6.1 · Caja lanzada hacia arriba de un plano ← volver

Datos. $m = 40\,\text{kg}$, $\theta = 30^\circ$, $v_0 = 18\,\text{m/s}$, $\mu_k = 0.2$, $g = 9.81\,\text{m/s}^2$.

Planteamiento. Eje x hacia arriba del plano. Mientras sube, la fricción y la componente del peso apuntan hacia abajo del plano; $N = mg\cos 30^\circ$.

Resolución.

$$\sum F_x = ma: \quad -mg\sin 30^\circ - \mu_k mg\cos 30^\circ = ma$$
$$a = -9.81(0.5 + 0.1732) = -6.604\,\text{m/s}^2$$

Con $v = v_0 + at = 0$: $t = 18/6.604 = 2.73\,\text{s}$. (Recorre $d = v_0^2/(2|a|) = 24.5\,\text{m}$.)

Resultado. $t = 2.73$ **s**.

Ejercicio 2.6.2 · Cuerpo horizontal y cuerpo colgante con tres tramos ← volver

Datos. $W_A = 196.2\,\text{N}$ ($m_A = 20\,\text{kg}$), $W_B = 392.4\,\text{N}$ ($m_B = 40\,\text{kg}$), $\mu_k = 0.2$, $v_0 = 3\,\text{m/s}$, $\Delta x = 6\,\text{m}$, $g = 9.81\,\text{m/s}^2$.

Planteamiento. Tres tramos sostienen a B: sobre él actúa $3T$ y $a_B = a_A/3$. A ya se mueve, así que $F_r = \mu_k N = 0.2(196.2) = 39.24\,\text{N}$, hacia la izquierda. x hacia la derecha para A; y hacia abajo para B.

Resolución.

$$A: \quad T - 39.24 = 20\,a_A$$
$$B: \quad 392.4 - 3T = 40\,a_B = \tfrac{40}{3}\,a_A$$

Al sustituir T: $392.4 - 3(39.24 + 20a_A) = 13.33\,a_A$, es decir, $274.68 = 73.33\,a_A$, de donde $a_A = 3.746\,\text{m/s}^2$ y $T = 114.2\,\text{N}$.

$$v^2 = v_0^2 + 2a_A\,\Delta x = 9 + 2(3.746)(6) = 53.95 \;\Rightarrow\; v = 7.34\,\text{m/s}.$$

Resultado. $v_A = 7.34$ **m/s hacia la derecha**.

Ejercicio 2.6.3 · Auto que frena en una recta y en una curva ← volver

Datos. $m = 500\,\text{kg}$, $v_A = 80\,\text{km/h} = 22.22\,\text{m/s}$, $AB = 50\,\text{m}$, $\rho = 100\,\text{m}$, arco de 45°, $v_C = 0$.

Planteamiento. La fricción es la única fuerza horizontal: produce la aceleración tangencial (constante) y, en la curva, la normal. Distancia total: $s = 50 + 100(\pi/4) = 128.5\,\text{m}$.

Resolución.

$$a_t = -\frac{v_A^2}{2s} = -\frac{493.8}{2(128.5)} = -1.921\,\text{m/s}^2.$$

En A (recta): $F_A = m|a_t| = 500(1.921) = 960\,\text{N}$.

En B: $v_B^2 = 493.8 - 2(1.921)(50) = 301.7\,\text{m}^2/\text{s}^2$ ($v_B = 17.37\,\text{m/s}$); $F_n = mv_B^2/\rho = 500(301.7)/100 = 1509\,\text{N}$ y $F_t = 960\,\text{N}$, así que $F_B = \sqrt{960^2 + 1509^2} = 1788\,\text{N}$.

En C: $v_C = 0$, así que $F_n = 0$ y $F_C = 960\,\text{N}$.

Resultado. $F_A = 960$ **N**, $F_B = 1788$ **N**, $F_C = 960$ **N**.

Ejercicio 2.6.4 · La normal se duplica al entrar en la curva ← volver

Datos. $\sin\theta = 0.8$, $\cos\theta = 0.6$, $R = 1\,\text{m}$, $\mu = 0.5$, $v_0 = 0$, $g = 9.81\,\text{m/s}^2$.

Planteamiento. En el plano, $N = mg\cos\theta = 0.6\,mg$. Justo al entrar en la curva, el centro C queda del lado de la normal y $N = 1.2\,mg$; la dirección normal sigue siendo la perpendicular al plano.

Resolución. a) $\sum F_n = ma_n$ en P:

$$1.2\,mg - 0.6\,mg = m\frac{v_P^2}{R} \;\Rightarrow\; v_P^2 = 0.6(9.81)(1) = 5.886, \qquad v_P = 2.43\,\text{m/s}.$$

b) En el plano: $mg\sin\theta - \mu mg\cos\theta = ma$, así que $a = 9.81(0.8 - 0.3) = 4.905\,\text{m/s}^2$ y

$$L = \frac{v_P^2}{2a} = \frac{5.886}{2(4.905)} = 0.60\,\text{m}.$$

Resultado. a) $v_P = 2.43$ **m/s**; b) $L = 0.60$ **m**.

Ejercicio 2.6.5 · Rapidez angular de un volantín ← volver

Datos. $L = 9.2\,\text{m}$, $b = 4.6\,\text{m}$, $\theta = 60°$, $g = 9.81\,\text{m/s}^2$.

Planteamiento. Cada columpio describe una circunferencia horizontal de radio $r = b + L\sin\theta = 4.6 + 9.2(0.866) = 12.57\,\text{m}$, con $a_n = \omega^2 r$. Sobre él actúan el peso y la tensión del brazo.

Resolución. $\sum F_y = 0$: $T\cos\theta = mg$; $\sum F_n = ma_n$: $T\sin\theta = m\omega^2 r$. Al dividir:

$$\omega^2 = \frac{g\tan\theta}{r} = \frac{9.81(1.732)}{12.57} = 1.352 \;\Rightarrow\; \omega = 1.163\,\text{rad/s} = 1.163\,\frac{60}{2\pi} = 11.1\,\text{rpm}.$$

Resultado. $\omega = 11.1$ **rpm**.

Ejercicio 2.6.6 · Péndulo que parte de la horizontal ← volver

Datos. $L = 1\,\text{m}$, $m = 0.2\,\text{kg}$, $\varphi = 45°$ (desde la horizontal), $v_0 = 0$, $g = 9.81\,\text{m/s}^2$.

Planteamiento. La plomada ha bajado $h = L\sin\varphi = 0.707\,\text{m}$; la rapidez sale de la energía (Unidad 3). La componente del peso en la dirección de la cuerda es $mg\sin\varphi$, alejándose del punto de suspensión.

Resolución.

$$v = \sqrt{2gh} = \sqrt{2(9.81)(0.707)} = 3.72\,\text{m/s}$$

$$\sum F_n = ma_n: \quad T - mg\sin\varphi = m\frac{v^2}{L} \;\Rightarrow\; T = 0.2(9.81)(0.707) + 0.2(13.87) = 4.16\,\text{N}$$

(En general, $T = 3mg\sin\varphi$.)

Resultado. $v = 3.72$ **m/s**, $T = 4.16$ **N**.

E.3 · Unidad 3 · Trabajo y energía, impulso y cantidad de movimiento de la partícula

Ejercicio 3.6.1 · Cuerpo que sube por un plano, comprime un resorte y cae al suelo ← volver

Datos. $m = 0.1\,\text{kg}$, $k = 3\,\text{N/m}$, $\sin\theta = 0.6$, $s_0 = 0.3\,\text{m}$, $s_1 = 1.0\,\text{m}$, compresión $x = 0.1\,\text{m}$, $h = 0.5\,\text{m}$, $g = 9.81\,\text{m/s}^2$.

Planteamiento. Plano liso y caída libre: se conserva la energía. La compresión máxima ocurre en $s = 1.1\,\text{m}$ con $v = 0$.

Resolución.

a) De s_0 a la compresión máxima sube $(1.1-0.3)(0.6) = 0.48\,\text{m}$: $\frac{1}{2}(0.1)v_0^2 = 0.1(9.81)(0.48) + \frac{1}{2}(3)(0.1^2) = 0.471 + 0.015$, de donde $v_0^2 = 9.72$ y $v_0 = 3.12\,\text{m/s}$.

b) De la compresión máxima ($v = 0$, resorte comprimido) al suelo baja $1.1(0.6) + 0.5 = 1.16\,\text{m}$ y el resorte devuelve su energía: $\frac{1}{2}(0.1)v^2 = 0.1(9.81)(1.16) + 0.015 = 1.153\,\text{J}$, de donde $v^2 = 23.06$ y $v = 4.80\,\text{m/s}$. Comprobación desde s_0: $v^2 = v_0^2 + 2(9.81)(0.18+0.5) = 23.06$.

Resultado. a) $v_0 = 3.12\,\text{m/s}$; b) $v = 4.80\,\text{m/s}$.

Ejercicio 3.6.2 · Pelotita lanzada por una cuerda elástica ← volver

Datos. $AB = 16\,\text{in}$, tensión con la cuerda recta $10\,\text{lb}$; $CC' = 6\,\text{in}$; fuerza en C' $60\,\text{lb}$; $W = 0.2\,\text{lb}$, $g = 32.2\,\text{ft/s}^2$. Plano horizontal: el peso no trabaja.

Planteamiento. Con las dos posiciones de equilibrio se obtienen k y la longitud natural de la cuerda; luego, conservación de la energía entre C' y C.

Resolución.

1. En C' cada mitad mide $\sqrt{8^2 + 6^2} = 10\,\text{in}$ (longitud total $20\,\text{in}$). Equilibrio de C': $2T(6/10) = 60$, de donde $T = 50\,\text{lb}$.
2. Al pasar de 16 a 20 in, la tensión sube de 10 a 50 lb: $k = 40/4 = 10\,\text{lb/in}$. Longitud natural: $16 - 10/10 = 15\,\text{in}$.
3. Alargamientos: $5\,\text{in}$ en C' y $1\,\text{in}$ en C. Energía liberada: $\frac{1}{2}(10)(5^2 - 1^2) = 120\,\text{lb in} = 10\,\text{ft lb}$.
4. $\frac{1}{2}\frac{0.2}{32.2}v^2 = 10$, de donde $v = 56.7\,\text{ft/s}$.

Resultado. $v = 56.7\,\text{ft/s}$.

Ejercicio 3.6.3 · Dos cuerpos en planos opuestos con polea móvil ← volver

Datos. $m_A = 20\,\text{kg}$, $m_B = 40\,\text{kg}$; lado de A: seno del ángulo 0.8, liso; lado de B: seno 0.6, coseno 0.8, $\mu_k = 0.15$; $g = 9.81\,\text{m/s}^2$; $s_B = 2\,\text{m}$.

Planteamiento. Por la polea móvil, $s_B = 2s_A$ y $v_A = v_B/2$. B baja: la cuerda le transmite a lo más $40g(0.6) - 0.15(40g)(0.8) = 19.2g$, que en los dos tramos de la polea de A equivalen a $38.4g$, mayor que $20g(0.8) = 16g$. Sistema completo: $U_{1\to 2} = \Delta T + \Delta V_g$.

Resolución.

1. Fricción: $U_{1\to 2} = -0.15(40)(9.81)(0.8)(2) = -94.2\,\text{J}$.
2. $\Delta V_g = -40(9.81)(0.6)(2) + 20(9.81)(0.8)(1) = -470.9 + 157.0 = -313.9\,\text{J}$.
3. $\Delta T = \frac{1}{2}(40)v_B^2 + \frac{1}{2}(20)(v_B/2)^2 = 22.5\,v_B^2$.
4. $-94.2 = 22.5\,v_B^2 - 313.9$, de donde $v_B^2 = 9.77$ y $v_B = 3.13\,\text{m/s}$; $v_A = 1.56\,\text{m/s}$.

Resultado. $v_B = 3.13\,\text{m/s}$ hacia abajo del plano; $v_A = 1.56\,\text{m/s}$ hacia arriba del plano.

Ejercicio 3.6.4 · Fuerza en rampa que vence la fricción ← volver

Datos. $m = 20\,\text{kg}$, $g = 9.81\,\text{m/s}^2$, $\mu = 0.6$; fricción $0.6(20)(9.81) = 117.7\,\text{N}$; $F = 40t$ hasta $5\,\text{s}$ y $F = 200$ después.

Planteamiento. El cuerpo arranca cuando F iguala a la fricción; desde ese instante, $mv_{10} = \int_{t_0}^{10} F\,dt - 117.7(10 - t_0)$.

Resolución.

1. Arranque: $40\,t_0 = 117.7$, de donde $t_0 = 2.94\,\text{s}$.
2. Impulso de F: $20(5^2 - 2.943^2) + 200(5) = 326.8 + 1000 = 1326.8\,\text{N s}$.
3. Impulso de la fricción: $-117.7(7.057) = -830.8\,\text{N s}$.
4. $20\,v_{10} = 496.0$, de donde $v_{10} = 24.8\,\text{m/s}$.

Resultado. $v_{10} = 24.8\,\text{m/s}$ en el sentido de F.

Ejercicio 3.6.5 · Fuerza promedio a partir del cambio de cantidad de movimiento ← volver

Datos. $m = 10\,\text{kg}$, $\vec{v}_1 = \vec{0}$, $\Delta(m\vec{v}) = 30\hat{\imath} + 12\hat{\jmath}\ \text{kg·m/s}$, $\Delta t = 5\,\text{s}$.

Planteamiento. $\vec{F}_{\text{prom}}\,\Delta t = \Delta(m\vec{v})$ y $m\vec{v}_2 = m\vec{v}_1 + \Delta(m\vec{v})$.

Resolución.

1. $\vec{F}_{\text{prom}} = (30\hat{\imath} + 12\hat{\jmath})/5 = 6\hat{\imath} + 2.4\hat{\jmath}\ \text{N}$, con magnitud $\sqrt{6^2 + 2.4^2} = 6.46\,\text{N}$.
2. $\vec{v}_2 = (30\hat{\imath} + 12\hat{\jmath})/10 = 3\hat{\imath} + 1.2\hat{\jmath}\ \text{m/s}$, con magnitud $3.23\,\text{m/s}$ a 21.8° del eje x.

Resultado. $|\vec{F}_{\text{prom}}| = 6.46\,\text{N}$; $\vec{v} = 3\hat{\imath} + 1.2\hat{\jmath}$ **m/s**.

Ejercicio 3.6.6 · Bala que atraviesa un bloque sobre piso rugoso ← volver

Datos. $m_b = 0.02\,\text{kg}$, $v_b = 400\,\text{m/s}$, $v_b' = 150\,\text{m/s}$; $m_A = 1\,\text{kg}$, $v_A = 0$; $\mu_k = 0.1$; $g = 9.81\,\text{m/s}^2$.

Planteamiento. Durante el choque (muy breve) el impulso de la fricción es despreciable frente a las fuerzas entre bala y bloque: se conserva la cantidad de movimiento horizontal. Después, trabajo y energía para el bloque: $-\mu_k m_A g\, d = 0 - \frac{1}{2} m_A v_A'^2$.

Resolución.

1. $0.02(400) + 0 = 0.02(150) + 1\,v_A'$, de donde $v_A' = 5\,\text{m/s}$.
2. Fricción: $0.1(1)(9.81) = 0.981\,\text{N}$; $0.981\,d = \frac{1}{2}(1)(5^2) = 12.5$, de donde $d = 12.7\,\text{m}$.
3. Energía perdida en el choque: $\frac{1}{2}(0.02)(400^2 - 150^2) - 12.5 = 1362.5\,\text{J}$ (se va en deformación y calor).

Resultado. $d = 12.7\,\text{m}$.

E.4 · Unidad 4 · Cinemática del cuerpo rígido: rotación, rodadura y mecanismos

Ejercicio 4.6.1 · Polea con aceleración angular que depende de θ ← volver

Datos. $r_A = 0.05\,\text{m}$, $r_C = 0.15\,\text{m}$, $r_D = 0.075\,\text{m}$, $\alpha_A = 6\theta_A$, $s_B = 2\,\text{m}$, reposo inicial.

Planteamiento. $\alpha(\theta)$: $\omega\,\mathrm{d}\omega = \alpha\,\mathrm{d}\theta$. Transmisión: la cuerda sobre D da $s_B = r_D\theta_C$; la banda da $r_A\theta_A = r_C\theta_C$ y $r_A\omega_A = r_C\omega_C$.

Resolución.

$$\int_0^{\omega_A} \omega\,\mathrm{d}\omega = \int_0^{\theta_A} 6\theta\,\mathrm{d}\theta \;\Rightarrow\; \omega_A^2 = 6\theta_A^2, \quad \omega_A = \sqrt{6}\,\theta_A.$$

$$\theta_C = \frac{2}{0.075} = 26.67\,\text{rad}, \qquad \theta_A = \frac{0.15(26.67)}{0.05} = 80\,\text{rad},$$

$$\omega_A = \sqrt{6}\,(80) = 196.0\,\text{rad/s}, \qquad \omega_C = \frac{196.0(0.05)}{0.15} = 65.32\,\text{rad/s},$$

$$v_B = \omega_C r_D = 65.32(0.075).$$

Resultado. $v_B = 4.90\,\text{m/s}$ hacia arriba.

Ejercicio 4.6.2 · Rueda de bicicleta ← volver

Datos. $v_B = 36/3.6 = 10\,\text{m/s}$ hacia la derecha, $r = 0.25\,\text{m}$ (radio, no diámetro).

Planteamiento. Rodadura sin deslizar: el CIR es O; $v_P = \omega\, r_{P/O}$.

Resolución. El eje se mueve con la bicicleta: $v_B = 10\,\text{m/s}$. $\omega = v_B/r = 10/0.25 = 40\,\text{rad/s}$, horario (avanza hacia la derecha). O es el CIR: $v_O = 0$. A está a $2r = 0.5\,\text{m}$ de O: $v_A = 40(0.5) = 20\,\text{m/s}$, horizontal hacia la derecha. En forma vectorial: $\vec{v}_A = 10\hat{\imath} + (-40\hat{k}) \times 0.25\hat{\jmath} = 10\hat{\imath} + 10\hat{\imath}$.

Resultado. $v_A = 20\,\text{m/s}$ y $v_B = 10\,\text{m/s}$ hacia la derecha; $v_O = 0$.

Ejercicio 4.6.3 · Manivela-biela-corredera en un plano inclinado ← volver

Datos. $\vec{r}_{A/O} = 2.828\hat{\imath} + 2.828\hat{\jmath}$, $\vec{r}_{B/A} = 12(\cos 15^\circ \hat{\imath} - \sin 15^\circ \hat{\jmath}) = 11.59\hat{\imath} - 3.106\hat{\jmath}$ [in]; $\omega_{OA} = 100\,\text{rad/s}$ horario. Dirección de la guía: $\hat{u} = 0.9659\hat{\imath} + 0.2588\hat{\jmath}$.

Planteamiento. $\vec{v}_B = \vec{v}_A + \omega_{AB}\hat{k} \times \vec{r}_{B/A} = v_B \hat{u}$.

Resolución. $\vec{v}_A = -100\hat{k} \times (2.828\hat{\imath} + 2.828\hat{\jmath}) = 282.8\hat{\imath} - 282.8\hat{\jmath}$.

$$\begin{aligned}(282.8 + 3.106\,\omega_{AB})\hat{\imath} + (-282.8 + 11.59\,\omega_{AB})\hat{\jmath}\\ = 0.9659\,v_B\hat{\imath} + 0.2588\,v_B\hat{\jmath}.\end{aligned}$$

Eliminando v_B: $0.2588(282.8 + 3.106\,\omega_{AB}) = 0.9659(-282.8 + 11.59\,\omega_{AB})$, de donde $346.4 = 10.39\,\omega_{AB}$ y $\omega_{AB} = 33.33\,\text{rad/s}$. Luego $v_B = (282.8 + 103.5)/0.9659 = 400\,\text{in/s}$.

Resultado. a) $\omega_{AB} = 33.3\,\text{rad/s}$ antihorario; b) $v_B = 400\,\text{in/s}$, a 15° sobre la horizontal, hacia arriba de la guía.

Ejercicio 4.6.4 · Cuatro articulaciones con una barra vertical ← volver

Datos. $\vec{r}_{B/A} = 7.5\hat{\imath}$, $\vec{r}_{C/B} = 5\hat{\imath} + 5\hat{\jmath}$, $\vec{r}_{C/D} = 10\hat{\jmath}$ [cm]; $\omega_{AB} = -4\,\text{rad/s}$, $\alpha_{AB} = 0$.

Planteamiento. Velocidad y aceleración de C por B y por D (4.3.4 y 4.3.5). Con CIR: el de BC está en la recta AB y en la recta CD, es decir, en $I = (0,\ 5)$, a 5 cm de B y de C.

Resolución. a) $\vec{v}_B = -4\hat{k} \times 7.5\hat{\imath} = -30\hat{\jmath}$.

$$\begin{aligned}\vec{v}_C &= -5\,\omega_{BC}\hat{\imath} + (-30 + 5\,\omega_{BC})\hat{\jmath}\\ &= \omega_{CD}\hat{k} \times 10\hat{\jmath} = -10\,\omega_{CD}\hat{\imath}.\end{aligned}$$

De $\hat{\jmath}$: $\omega_{BC} = 6\,\text{rad/s}$; de $\hat{\imath}$: $\omega_{CD} = 3\,\text{rad/s}$. (Con el CIR: $\omega_{BC} = 30/5 = 6$.)

b) $\vec{a}_B = -16(7.5\hat{\imath}) = -120\hat{\imath}$.

$$\begin{aligned}\vec{a}_C &= -120\hat{\imath} + \alpha_{BC}\hat{k} \times (5\hat{\imath} + 5\hat{\jmath}) - 36(5\hat{\imath} + 5\hat{\jmath})\\ &= (-300 - 5\,\alpha_{BC})\hat{\imath} + (-180 + 5\,\alpha_{BC})\hat{\jmath},\\ \vec{a}_C &= \alpha_{CD}\hat{k} \times 10\hat{\jmath} - 9(10\hat{\jmath}) = -10\,\alpha_{CD}\hat{\imath} - 90\hat{\jmath}.\end{aligned}$$

De $\hat{\jmath}$: $\alpha_{BC} = 18\,\text{rad/s}^2$; de $\hat{\imath}$: $-10\,\alpha_{CD} = -300 - 90$, $\alpha_{CD} = 39\,\text{rad/s}^2$.

Resultado. a) $\omega_{BC} = 6\,\text{rad/s}$ antihorario; b) $\alpha_{CD} = 39\,\text{rad/s}^2$ antihorario.

Ejercicio 4.6.5 · Barra entre un collarín y una ranura semicircular ← volver

Datos. Con origen en O: $B = (4\sin 60^\circ, -4\cos 60^\circ) = (3.464, -2)$ y $A = (0, -8)$ [ft]; $\vec{v}_A = -8\hat{\jmath}$.

Planteamiento. $\vec{v}_B$ es tangente a la ranura (perpendicular a OB). CIR de AB: cruce de la horizontal por A (perpendicular a $\vec{v}_A$) con la recta OB (perpendicular a $\vec{v}_B$).

Resolución. La recta OB baja 0.5 por cada 0.866 que avanza; llega a $y = -8$ en $x = 8(0.866)/0.5 = 13.86$ ft. Así $I = (13.86, -8)$, con $r_{A/I} = 13.86$ ft y $r_{B/I} = \sqrt{10.39^2 + 6^2} = 12.00$ ft.

$$\omega_{AB} = \frac{v_A}{r_{A/I}} = \frac{8}{13.86} = 0.577 \text{ rad/s},$$

$$v_B = \omega_{AB}\, r_{B/I} = 0.577(12.00) = 6.93 \text{ ft/s}.$$

A está a la izquierda de I y baja: la barra gira en sentido antihorario. $\vec{v}_B$ es perpendicular a IB: hacia abajo y a la izquierda, a 60° bajo la horizontal. Comprobación vectorial: $\vec{v}_B = -8\hat{\jmath} + \omega\hat{k}\times(3.464\hat{\imath} + 6\hat{\jmath}) = -6\omega\hat{\imath} + (-8 + 3.464\,\omega)\hat{\jmath}$, paralela a $(0.5,\ 0.866)$: $-8 + 3.464\,\omega = -10.39\,\omega$, $\omega = 0.577$.

Resultado. a) $\omega_{AB} = 0.577$ rad/s antihorario; b) $v_B = 6.93$ ft/s a 60° bajo la horizontal, hacia la izquierda.

E.5 · Unidad 5 · Cinética del cuerpo rígido: traslación, rotación y movimiento plano general

Ejercicio 5.6.1 · Volante con un cuerpo colgado ← volver

Datos. $W = 250$ lb, $r = 20/12 = 1.667$ ft, $\bar{k} = 15/12 = 1.25$ ft, $W_A = 30$ lb, $g = 32.2$ ft/s^2.

Planteamiento. Volante en rotación centroidal: $\sum M_O = \bar{I}\alpha$ con $Tr = \bar{I}\alpha$. Cuerpo A: $W_A - T = m_A a_A$. Cinemática: $a_A = r\alpha$. $\bar{I} = \frac{250}{32.2}(1.25)^2 = 12.13$ slug ft^2; $m_A = 0.9317$ slug.

Resolución. De la ecuación del volante, $T = \bar{I}a_A/r^2 = 12.13\,a_A/2.778 = 4.367\,a_A$. En la del cuerpo:

$$30 - 4.367\,a_A = 0.9317\,a_A \;\Rightarrow\; a_A = \frac{30}{5.299} = 5.66 \text{ ft/s}^2.$$

$T = 4.367(5.66) = 24.7$ lb (comprobación: $30 - 0.9317(5.66) = 24.7$).

Resultado. a) $a_A = 5.66$ ft/s^2 hacia abajo; b) $T = 24.7$ lb.

Ejercicio 5.6.2 · Carrete que se desenrolla al caer ← volver

Datos. $m = 20$ kg, $\bar{k} = 0.25$ m, $r = 0.1$ m (cubo), $t = 3$ s, $v_0 = 0$, $g = 9.81$ m/s^2.

Planteamiento. Movimiento plano general. El punto del cubo tangente a la cuerda fija no se acelera verticalmente: $\bar{a} = r\alpha = 0.1\alpha$. La longitud desenrollada es igual a lo que baja G. Ecuaciones (positivo hacia abajo y en el sentido de giro):

$$mg - T = m\bar{a}, \qquad Tr = m\bar{k}^2\alpha.$$

Resolución. De la segunda, $T = m\bar{k}^2\bar{a}/r^2 = 6.25\,m\bar{a}$. En la primera:

$$g = \bar{a}\,(1 + 6.25) \;\Rightarrow\; \bar{a} = \frac{9.81}{7.25} = \frac{4g}{29} = 1.353\,\text{m/s}^2.$$

Con aceleración constante desde el reposo: $s = \frac{1}{2}\bar{a}t^2 = \frac{1}{2}(1.353)(3)^2 = 6.09\,\text{m}$. (Además, $\alpha = 13.5\,\text{rad/s}^2$ y $T = 20(9.81 - 1.353) = 169\,\text{N}$.)

Resultado. $s = 6.09\,\text{m}$.

Ejercicio 5.6.3 · Camioneta que frena con las ruedas bloqueadas ← volver

Datos. $v_0 = 30\,\text{ft/s}$, $v = 0$, $s = 20\,\text{ft}$, $h = 4\,\text{ft}$, $d_{\text{del}} = 7\,\text{ft}$, $d_{\text{tras}} = 5\,\text{ft}$, $g = 32.2\,\text{ft/s}^2$.

Planteamiento. Traslación rectilínea. Cinemática: $v^2 = v_0^2 + 2as$. Las cuatro ruedas patinan: $F = \mu_k N$ en cada una. Por rueda, N_{del} y N_{tras}; la fricción actúa hacia atrás a nivel del suelo, 4 ft debajo de G. Ecuaciones: $\sum F_x = m\bar{a}$, $\sum F_y = 0$, $\sum M_G = 0$.

Resolución. $a = -\dfrac{30^2}{2(20)} = -22.5\,\text{ft/s}^2$. Fuerza horizontal total: $-\mu_k P = \dfrac{P}{g}(-22.5)$, de donde $\mu_k = 22.5/32.2 = 0.699$.

Momentos respecto a G (las normales delanteras y la fricción tienden a girar el vehículo hacia adelante; las traseras, hacia atrás):

$$2N_{\text{del}}(7) - 2N_{\text{tras}}(5) - \mu_k P(4) = 0, \qquad 2N_{\text{del}} + 2N_{\text{tras}} = P.$$

Con $2N_{\text{tras}} = P - 2N_{\text{del}}$: $14N_{\text{del}} - 5P + 10N_{\text{del}} = 2.795P$, así que

$$N_{\text{del}} = \frac{7.795P}{24} = 0.325P, \qquad N_{\text{tras}} = 0.5P - 0.325P = 0.175P.$$

Fricciones: $F_{\text{del}} = 0.699(0.325P) = 0.227P$, $F_{\text{tras}} = 0.699(0.175P) = 0.122P$.

Resultado. En cada rueda delantera, $N = 0.325P$ y $F = 0.227P$; en cada rueda trasera, $N = 0.175P$ y $F = 0.122P$.

Ejercicio 5.6.4 · Placa que pierde un pasador ← volver

Datos. $m = 300\,\text{kg}$, $a = 4\,\text{m}$, $b = 2.5\,\text{m}$, $\omega = 0$, $g = 9.81\,\text{m/s}^2$.

Planteamiento. Justo después de la ruptura, rotación no centroidal alrededor de A con $\omega = 0$: $\bar{a}_n = 0$ y $\bar{a} = \bar{r}\alpha$, perpendicular a AG. G está 2 m a la derecha y 1.25 m abajo de A: $\bar{r}^{\,2} = 2^2 + 1.25^2 = 5.5625\,\text{m}^2$, $\bar{r} = 2.358\,\text{m}$.

$$\bar{I} = \tfrac{1}{12}(300)(4^2 + 2.5^2) = 556.3\,\text{kg m}^2,$$
$$I_A = 556.3 + 300(5.5625) = 2225\,\text{kg m}^2.$$

Resolución. $\sum M_A = I_A\alpha$: $300(9.81)(2) = 2225\,\alpha$, $\alpha = 2.645\,\text{rad/s}^2$ (horario).
Con $\vec{\alpha} = -2.645\hat{k}$ y $\vec{r}_{G/A} = 2\hat{\imath} - 1.25\hat{\jmath}$: $\vec{\bar{a}} = \vec{\alpha} \times \vec{r}_{G/A} = (-3.306\hat{\imath} - 5.290\hat{\jmath})\,\text{m/s}^2$.

$$R_x = m\bar{a}_x = 300(-3.306) = -991.9\,\text{N},$$
$$R_y - 2943 = 300(-5.290) \;\Rightarrow\; R_y = 1356\,\text{N}.$$

$R_A = \sqrt{991.9^2 + 1356^2} = 1680\,\text{N}$.

Resultado. $\alpha = 2.65\,\text{rad/s}^2$ en sentido horario; $R_A = 1680\,\text{N}$ (992 N hacia la izquierda y 1356 N hacia arriba).

Ejercicio 5.6.5 · Esfera que rueda por una pendiente ← volver

Datos. $m = 5\,\text{kg}$, $r = 0.2\,\text{m}$, pendiente $7/24$ ($\sin\theta = 7/25 = 0.28$), $t = 2\,\text{s}$, $g = 9.81\,\text{m/s}^2$.

Planteamiento. Rueda sin deslizar: para una rueda homogénea que rueda sin deslizar, la ecuación de momentos puede tomarse respecto al punto de contacto C, con

$$I_C = \bar{I} + mr^2 = \tfrac{7}{5}mr^2 = \tfrac{7}{5}(5)(0.2)^2 = 0.28\,\text{kg m}^2.$$

Resolución. $\sum M_C = I_C\alpha$: $5(9.81)(0.28)(0.2) = 0.28\,\alpha$, $\alpha = 9.81\,\text{rad/s}^2$; $\bar{a} = \alpha r = 1.962\,\text{m/s}^2$ (es decir, $\frac{5}{7}g\sin\theta$).

$$x = \tfrac{1}{2}\bar{a}t^2 = \tfrac{1}{2}(1.962)(2)^2 = 3.92\,\text{m}.$$

Resultado. $x = 3.92\,\text{m}$.

Ejercicio 5.6.6 · Barra que cae girando alrededor de su base ← volver

Datos. $L = 1\,\text{ft}$, $\theta_{\text{ini}} = 45°$, $\theta_{\text{fin}} = 90°$, $\omega_{\text{ini}} = 0$, $g = 32.2\,\text{ft/s}^2$.

Planteamiento. Rotación alrededor de un eje fijo; energía del cuerpo rígido con $T = \frac{1}{2}I_A\omega^2$, $I_A = \frac{1}{3}mL^2$. La reacción en A no trabaja; solo el peso, por la bajada de G: $\Delta y_G = -\frac{L}{2}\cos 45° = -0.3536\,\text{ft}$.

$$0 = \Delta T + \Delta V_g = \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{1}{3}mL^2\right)\omega^2 + mg\,\Delta y_G.$$

Resolución. La masa se cancela:

$$\tfrac{1}{6}\omega^2 = 32.2(0.3536) = 11.38 \;\Rightarrow\; \omega = \sqrt{68.3} = 8.26\,\text{rad/s}.$$

(Con la segunda ley: $\alpha = 1.5g\sin\theta$ e $\int \omega\,\mathrm{d}\omega = \int \alpha\,\mathrm{d}\theta$ dan $\omega^2 = 3g\cos 45°$, el mismo valor.)

Resultado. $\omega = 8.26\,\text{rad/s}$.