

Ejercicio 3.6.9

← volver

1. En cilíndricas: $\vec{F} \cdot d\vec{r} = -\frac{z}{r^2} \sec^2 \theta dr + \frac{2z}{r} \sec^2 \theta \tan \theta d\theta + \frac{\sec^2 \theta}{r} dz$, porque $1 + \tan^2 \theta = \sec^2 \theta$.
2. $\varphi = \int -\frac{z}{r^2} \sec^2 \theta dr = \frac{z}{r} \sec^2 \theta + g(\theta, z)$.
3. $\varphi_\theta = \frac{z}{r} \cdot 2 \sec^2 \theta \tan \theta + g_\theta$, que coincide si $g_\theta = 0$; $\varphi_z = \frac{\sec^2 \theta}{r} + g_z$, que coincide si $g_z = 0$. Es conservativo, con $\varphi = \frac{z}{r} \sec^2 \theta$.
4. $\varphi(B) = \frac{2}{2} \sec^2 0 = 1$ y $\varphi(A) = \frac{1}{1} \sec^2 \frac{\pi}{4} = 2$.
5. $W = 1 - 2 = -1$.

E.4A · Unidad 4 · Parte A · Integrales múltiples: integrales dobles, áreas, volúmenes, cambio de variable y teorema de Green

Ejercicio 4A.6.1

← volver

1. Región: $1 \leq r \leq 2, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$; el integrando es $\cos \frac{\pi r^2}{2}$.
2. $I = \int_0^{\pi/2} \int_1^2 \cos\left(\frac{\pi r^2}{2}\right) r dr d\theta$.
3. En r : con $w = \frac{\pi r^2}{2}$, $dw = \pi r dr$: $\int_1^2 \cos\left(\frac{\pi r^2}{2}\right) r dr = \frac{1}{\pi} \left[\sin w \right]_{\pi/2}^{2\pi} = \frac{1}{\pi} (0 - 1) = -\frac{1}{\pi}$.
4. En θ : $-\frac{1}{\pi} \cdot \frac{\pi}{2} = -\frac{1}{2}$.

Ejercicio 4A.6.2

← volver

1. Intersecciones: $x(8 - x) = 7 \Rightarrow x^2 - 8x + 7 = 0 \Rightarrow (x - 1)(x - 7) = 0$, así que $x = 1$ y $x = 7$.
2. Entre ellas, el techo es la recta $y = 8 - x$ y el piso, la hipérbola $y = \frac{7}{x}$ (en $x = 2$: $6 > 3.5$).
3. $A = \int_1^7 \left(8 - x - \frac{7}{x} \right) dx = \left[8x - \frac{x^2}{2} - 7 \ln x \right]_1^7$.
4. $= \left(56 - \frac{49}{2} - 7 \ln 7 \right) - \left(8 - \frac{1}{2} \right) = 24 - 7 \ln 7$. $A = 24 - 7 \ln 7 \mathbf{u}^2$.

Ejercicio 4A.6.3

← volver

1. Intersecciones: la recta $x + y = 3$ corta a la circunferencia en $(3, 0)$ y $(0, 3)$.
2. El segmento pequeño está entre la recta (piso) y el arco $y = \sqrt{9 - x^2}$ (techo), para $0 \leq x \leq 3$.
3. $A = \int_0^3 \left[\sqrt{9 - x^2} - (3 - x) \right] dx$.
4. $\int_0^3 \sqrt{9 - x^2} dx$ es un cuarto del círculo de radio 3: $\frac{9\pi}{4}$. Además $\int_0^3 (3 - x) dx = \frac{9}{2}$ (un triángulo).
5. $A = \frac{9\pi}{4} - \frac{9}{2} = \frac{9}{4}(\pi - 2) \mathbf{u}^2$.

Ejercicio 4A.6.4

← volver

$$4. \int_0^2 \int_0^2 \frac{u^2 + v^2}{2} \cdot \frac{1}{2} du dv = \frac{1}{4} \int_0^2 \left(\frac{8}{3} + 2v^2 \right) dv = \frac{1}{4} \left(\frac{16}{3} + \frac{16}{3} \right).$$

$$5. \frac{8}{3}.$$

E.4B · Unidad 4 · Parte B · Integrales múltiples: integrales de superficie, integrales triples y teoremas de Stokes y Gauss

Ejercicio 4B.6.1

← volver

1. Esfera, superficie cerrada. $\nabla \cdot \vec{F} = 3 + 2 + 4 = 9$.
2. Radio 5: $V = \frac{4}{3}\pi(125) = \frac{500\pi}{3}$.
3. Flujo = $9 \cdot \frac{500\pi}{3} = 1500\pi$.

Ejercicio 4B.6.2

← volver

1. Cono más tapa, cerrada. $\nabla \cdot \vec{F} = 3$.
2. Altura 2; en $z = 2$ el radio es 2. $V = \frac{1}{3}\pi(4)(2) = \frac{8\pi}{3}$.
3. Flujo = $3 \cdot \frac{8\pi}{3} = 8\pi$.

Ejercicio 4B.6.3

← volver

1. $P_x = 2xy^2 + 3$, $Q_y = -2xy^2 + 3$, $R_z = 3$. Entonces $\nabla \cdot \vec{F} = 9$.
2. $V = \pi(2)^2(8) = 32\pi$.
3. Flujo = $9 \cdot 32\pi = 288\pi$.

Ejercicio 4B.6.4

← volver

1. $P_x = 0$, $Q_y = x^2$, $R_z = y^2$: $\nabla \cdot \vec{F} = x^2 + y^2 = r^2$.
2. Flujo = $\int_0^{2\pi} \int_0^2 \int_{-1}^1 r^2 \cdot r dz dr d\theta = 2\pi \cdot 2 \cdot \frac{2^4}{4}$.
3. 16π .

Ejercicio 4B.6.5

← volver

1. $P_x = 3x^2$, $Q_y = -3x^2$, $R_z = 1$: $\nabla \cdot \vec{F} = 1$. El flujo es el volumen.
2. Techo $z = 16 - y$, piso $z = 0$, sombra: disco $r \leq 2$.
3. $V = \iint_R (16 - y) dA = 16 \cdot 4\pi - \iint_R y dA$, y la segunda vale 0 por simetría.
4. Flujo = 64π .

Ejercicio 4B.6.6

← volver

1. $P_x = 2x$, $Q_y = -2x$, $R_z = 2z$: $\nabla \cdot \vec{F} = 2z$.
2. Sólido: $r \leq z \leq 3$, $0 \leq r \leq 3$.
3. Flujo = $\int_0^{2\pi} \int_0^3 \int_r^3 2z r dz dr d\theta = 2\pi \int_0^3 (9 - r^2) r dr$.
4. $= 2\pi \left(\frac{81}{2} - \frac{81}{4} \right) = 2\pi \cdot \frac{81}{4} = \frac{81\pi}{2}$.

Ejercicio 4B.6.7

← volver

1. $r = e$ es la circunferencia de radio e con centro en el origen; $r = 2e \sin \theta$ es la de radio e con centro en $(0, e)$.
2. Intersección: $e = 2e \sin \theta \Rightarrow \sin \theta = \frac{1}{2}$, así que $\theta = \frac{\pi}{6}$ y $\theta = \frac{5\pi}{6}$.
3. Por simetría respecto al eje Y se calcula la mitad derecha y se duplica. Para $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{6}$ manda la curva $r = 2e \sin \theta$; para $\frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$, la curva $r = e$.
4. $\int_0^{\pi/6} \frac{(2e \sin \theta)^2}{2} d\theta = e^2 \int_0^{\pi/6} (1 - \cos 2\theta) d\theta = e^2 \left(\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4} \right)$.
5. $\int_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{e^2}{2} d\theta = \frac{e^2}{2} \cdot \frac{\pi}{3} = \frac{\pi e^2}{6}$.
6. $A = 2 \left[e^2 \left(\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4} \right) + \frac{\pi e^2}{6} \right] = e^2 \left(\frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \mathbf{u}^2$.

Ejercicio 4A.6.5

← volver

1. Techo $z = 16 - y$, piso $z = 0$, sombra: disco $r \leq 2$ (en el disco, $16 - y > 0$).
2. $V = \iint_R (16 - y) dA = 16 \cdot \text{Área} - \iint_R y dA$.
3. El disco es simétrico respecto al eje X , así que $\iint_R y dA = 0$.
4. $V = 16 \cdot 4\pi = 64\pi \mathbf{u}^3$.

Ejercicio 4A.6.6

← volver

1. $P = xy \Rightarrow P_y = x$; $Q = x + y \Rightarrow Q_x = 1$. Entonces $Q_x - P_y = 1 - x$.
2. Región: medio anillo, $3 \leq r \leq 4$, $0 \leq \theta \leq \pi$.
3. $\iint_R (1 - x) dA = \text{Área} - \iint_R x dA$.
4. Área: $\frac{1}{2}\pi(16-9) = \frac{7\pi}{2}$. El medio anillo es simétrico respecto al eje Y , así que $\iint_R x dA = 0$ (en polares, $\int_0^\pi \cos \theta d\theta = 0$).
5. $\frac{7\pi}{2}$.

Ejercicio 4A.6.7

← volver

1. $P = y - x \Rightarrow P_y = 1$; $Q = 2x - y \Rightarrow Q_x = 2$. Entonces $Q_x - P_y = 1$: la integral es el área de la región.
2. Intersecciones: $x = x^2 - x \Rightarrow x(x - 2) = 0$, así que $x = 0$ y $x = 2$. Entre ellas, la recta $y = x$ está arriba.
3. $A = \int_0^2 [x - (x^2 - x)] dx = \int_0^2 (2x - x^2) dx = 4 - \frac{8}{3}$.
4. $\frac{4}{3}$.

Ejercicio 4A.6.8

← volver

1. Límites: $0 \leq u \leq 2$, $0 \leq v \leq 2$.
2. $J\left(\begin{smallmatrix} u,v \\ x,y \end{smallmatrix}\right) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2$; entonces $\left| J\left(\begin{smallmatrix} x,y \\ u,v \end{smallmatrix}\right) \right| = \frac{1}{2}$.
3. $x = \frac{u+v}{2}$, $y = \frac{u-v}{2}$, de donde $x^2 + y^2 = \frac{(u+v)^2 + (u-v)^2}{4} = \frac{u^2 + v^2}{2}$.

1. Forma canónica: $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} = 1$, un elipsoide cerrado. Para cada $r \leq 2$, $-\frac{3}{2}\sqrt{4-r^2} \leq z \leq \frac{3}{2}\sqrt{4-r^2}$.
2. $P_x = -y^2$, $Q_y = -x^2$, $R_z = 4$: $\nabla \cdot \vec{F} = 4 - r^2$.
3. En z : $(4-r^2) \cdot 3\sqrt{4-r^2} = 3(4-r^2)^{3/2}$.
4. Flujo = $\int_0^{2\pi} \int_0^2 3(4-r^2)^{3/2} r dr d\theta = 6\pi \left[-\frac{1}{5}(4-r^2)^{5/2} \right]_0^2 = 6\pi \cdot \frac{32}{5}$.
5. $\frac{192\pi}{5}$.

Ejercicio 4B.6.8

← volver

1. Cilindro de radio 4 entre $z = -5$ y $z = 4$ (altura 9). Integrando r : $dV = r dr d\theta dz$.
2. $\int_0^{2\pi} \int_0^4 \int_{-5}^4 r^2 dz dr d\theta = 2\pi \cdot 9 \cdot \frac{4^3}{3} = 2\pi \cdot 9 \cdot \frac{64}{3}$.
3. 384π .

Ejercicio 4B.6.9

← volver

1. Esfera de radio 4: $dS = 16 \sin \phi d\phi d\theta$.
2. Primer octante: $0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}$. Entre los planos $y = x$ y $x = 0$: $\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$.
3. $A = \int_{\pi/4}^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} 16 \sin \phi d\phi d\theta = 16 \cdot 1 \cdot \frac{\pi}{4} = 4\pi \mathbf{u}^2$.

Ejercicio 4B.6.10

← volver

1. Parametrización $\vec{r}(x, z) = (x, x^2, z)$ con $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq z \leq x$.
2. $\vec{r}_x = (1, 2x, 0)$, $\vec{r}_z = (0, 0, 1)$; $\vec{r}_x \times \vec{r}_z = (2x, -1, 0)$, de norma $\sqrt{1+4x^2}$.
3. $A = \int_0^1 \int_0^x \sqrt{1+4x^2} dz dx = \int_0^1 x\sqrt{1+4x^2} dx = \left[\frac{(1+4x^2)^{3/2}}{12} \right]_0^1$.
4. $A = \frac{5\sqrt{5}-1}{12} \mathbf{u}^2$.

Ejercicio 4B.6.11

← volver

1. Cilindro de radio 2: $x = 2 \cos \theta$, $y = 2 \sin \theta$, $z = z$; $dS = 2 d\theta dz$, con $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$, $0 \leq z \leq 2$.
2. $xy^2 dS = (2 \cos \theta)(4 \sin^2 \theta)(2) d\theta dz = 16 \sin^2 \theta \cos \theta d\theta dz$.
3. $\int_0^2 \int_0^{\pi/2} 16 \sin^2 \theta \cos \theta d\theta dz = 16 \cdot \frac{1}{3} \cdot 2 = \frac{32}{3}$.

Ejercicio 4B.6.12

← volver

1. $\nabla \times \vec{F} = (1, -1, 2)$, como en el ejercicio 4B.5.6.
2. Superficie: $z = -\frac{x}{2} - y$; $\vec{N} = (\frac{1}{2}, 1, 1)$, hacia arriba.
3. $(\nabla \times \vec{F}) \cdot \vec{N} = \frac{1}{2} - 1 + 2 = \frac{3}{2}$, constante.
4. Sombra: disco de radio 1. Circulación = $\frac{3}{2}\pi = \frac{3\pi}{2}$ (sentido antihorario visto desde arriba; en sentido contrario, $-\frac{3\pi}{2}$).

Ejercicio 4B.6.13

← volver

1. La curva es la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$ en el plano $z = 1$.
2. $\nabla \times \vec{F} = (0 - 0, 0 - 0, 1 - 2y) = (0, 0, 1 - 2y)$.
3. Superficie: el disco en $z = 1$, con $\hat{n} = \hat{k}$. $\iint_{r \leq 1} (1 - 2y) dA = \pi - 2 \iint y dA = \pi - 0$.
4. π (sentido antihorario visto desde arriba).

Ejercicio 4B.6.14

← volver

1. Con $z = 1$: $x^2 + y^2 = 4$, circunferencia de radio 2 en el plano $z = 1$.
2. $\nabla \times \vec{F} = (2xy - x^2, 2yz - y^2, 2xz - z^2)$.
3. Superficie: el disco en $z = 1$, con $\hat{n} = \hat{k}$. Ahí, $(\nabla \times \vec{F}) \cdot \hat{k} = 2x - 1$.
4. $\iint_{r \leq 2} (2x - 1) dA = 2 \cdot 0 - 4\pi$.
5. -4π (sentido antihorario visto desde arriba).