

- $\varphi(P) = \frac{1}{3} (8 + (\sqrt{2})^3 + 0) = \frac{8+2\sqrt{2}}{3}$ y $\varphi(O) = 0$.
- $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \frac{8+2\sqrt{2}}{3}$.
- Comprobación directa con $\vec{r}(t) = (t^2, t, 0)$, $0 \leq t \leq \sqrt{2}$: $\vec{F} \cdot \vec{r}' = 2t^5 + t^2 \Rightarrow \int_0^{\sqrt{2}} (2t^5 + t^2) dt = \frac{8}{3} + \frac{2\sqrt{2}}{3}$.

Ejercicio 3.6.5

← volver

- $R_y - Q_z = 1 - 1 = 0$; $-(R_x - P_z) = -(8z^3 - 8z^3) = 0$; $Q_x - P_y = (-2 - 3y^2) - (-3y^2 - 2) = 0$. Es conservativo.
- $\varphi = \int (-y^3 - 2y + 2z^4) dx = -xy^3 - 2xy + 2xz^4 + g(y, z)$.
- $\varphi_y = -3xy^2 - 2x + g_y = -2x - 3xy^2 + z \Rightarrow g_y = z \Rightarrow g = yz + h(z)$.
- $\varphi_z = 8xz^3 + y + h'(z) = y + 8xz^3 + 6 \Rightarrow h = 6z$. Entonces $\varphi = -xy^3 - 2xy + 2xz^4 + yz + 6z$.
- $\varphi(B) = \varphi(1, 0, 1) = 2 + 6 = 8$ y $\varphi(A) = \varphi(-1, 2, 1) = 8 + 4 - 2 + 2 + 6 = 18$.
- $W = 8 - 18 = -10$.

Ejercicio 3.6.6

← volver

- $\vec{F} \cdot d\vec{r} = 4r^3 \sin \theta dr + r \cdot r^3 \cos \theta d\theta = 4r^3 \sin \theta dr + r^4 \cos \theta d\theta$.
- $\varphi = \int 4r^3 \sin \theta dr = r^4 \sin \theta + g(\theta)$; $\varphi_\theta = r^4 \cos \theta + g' = r^4 \cos \theta \Rightarrow g' = 0$.
- $\varphi(B) = 1 \cdot \sin \frac{\pi}{2} = 1$ y $\varphi(A) = 0$.
- $W = 1$.

Ejercicio 3.6.7

← volver

- $Q_x - P_y = -1 - 1 = -2 \neq 0$: no es conservativo. Se suma por tramos, con $\vec{F} \cdot d\vec{r} = y dx - x dy$.
- De A a B: $y = 0$, $dy = 0$, así que la integral vale 0.
- De B a C: $\vec{r}(t) = (1-t, t)$, $0 \leq t \leq 1$; $y dx - x dy = t(-dt) - (1-t) dt = -dt$, que integra -1.
- De C a A: $x = 0$, $dx = 0$, así que la integral vale 0.
- $W = 0 - 1 + 0 = -1$. Con el teorema de Green: $\iint_R (Q_x - P_y) dA = -2 \cdot \frac{1}{2} = -1$.

Ejercicio 3.6.8

← volver

- $R_y = \frac{-2yz}{(y^2 + z^2)^2}$ y $Q_z = \frac{-2yz}{(y^2 + z^2)^2}$: componente $\hat{i}$ nula.
- $R_x = 0$ y $P_z = 0$: componente $\hat{j}$ nula.
- $Q_x = 2 \sec^2(x+y) \tan(x+y) = P_y$: componente $\hat{k}$ nula.
- $\varphi = \int (\ln x + \sec^2(x+y)) dx = x \ln x - x + \tan(x+y) + g(y, z)$; $\varphi_y = \sec^2(x+y) + g_y \Rightarrow g_y = \frac{y}{y^2+z^2} \Rightarrow g = \frac{1}{2} \ln(y^2 + z^2) + h(z)$; $\varphi_z = \frac{z}{y^2+z^2} + h' \Rightarrow h' = 0$. El campo es **conservativo**, con $\varphi = x \ln x - x + \tan(x+y) + \frac{1}{2} \ln(y^2 + z^2)$.
- $\nabla \cdot \vec{F} = \left(\frac{1}{x} + 2 \sec^2(x+y) \tan(x+y) \right) + \left(2 \sec^2(x+y) \tan(x+y) + \frac{z^2 - y^2}{(y^2 + z^2)^2} \right) + \frac{y^2 - z^2}{(y^2 + z^2)^2}$.
- $\nabla \cdot \vec{F} = \frac{1}{x} + 4 \sec^2(x+y) \tan(x+y) \neq 0$: **no es solenoidal**.

4B.3.9 Circulación con el teorema de Stokes

- Calcula $\nabla \times \vec{F}$ componente por componente.
- Elige la superficie más sencilla con frontera C: el disco o la porción de plano que encierra la curva. Si es $z = g(x, y)$, $\vec{N} = (-g_x, -g_y, 1)$.
- Calcula $(\nabla \times \vec{F}) \cdot \vec{N}$ sobre la superficie. Si es constante, la circulación es esa constante por el **área de la sombra**.
- Revisa el **sentido** de C: evalúa la parametrización en dos valores de t. Antihorario visto desde arriba: signo +; horario: signo -. Si el enunciado no lo dice, usa el sentido antihorario visto desde arriba y escríbelo.
- Si queda un término con x o y sobre un disco centrado, vale cero por simetría.

4B.4 Ejemplo resuelto

Adaptado de: 1er extraordinario 2026-1, problema 6.

Calcule el flujo del campo $\vec{F}(x, y, z) = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ a través de la superficie esférica $x^2 + y^2 + z^2 = 9$.

Datos: $\vec{F} = (x, y, z)$; S: esfera de radio 3 [u], cerrada; normal exterior.

Planteamiento. La superficie es cerrada, así que se aplica el teorema de Gauss:

$$\oiint_S \vec{F} \cdot \hat{n} dS = \iiint_V \nabla \cdot \vec{F} dV$$

Resolución.

- $\nabla \cdot \vec{F} = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} = 1 + 1 + 1 = 3$, constante.
- Radio $\sqrt{9} = 3$; volumen $V = \frac{4}{3}\pi(3)^3 = 36\pi$.
- Flujo $= 3 \cdot 36\pi = 108\pi$.
- Comprobación directa:** en la esfera, $\hat{n} = \frac{\vec{r}}{3}$ y $\vec{F} \cdot \hat{n} = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{3} = \frac{9}{3} = 3$. Flujo $= 3 \cdot \text{Área} = 3 \cdot 4\pi(9) = 108\pi$.

Resultado: el flujo neto es 108π y es positivo: el campo sale de la esfera.

Con divergencia constante, el problema se reduce a una fórmula de volumen. Antes de integrar cualquier flujo por una superficie cerrada, calcula la divergencia.

4B.5 Ejercicios de examen (resueltos)

Ejercicio 4B.5.1 · Área de una porción de superficie

Adaptado de: 2º extraordinario 2025-1, problema 5.

Calcule el área de la porción de la superficie $z = x^2 - y^2$ dentro del cilindro $x^2 + y^2 = 2$.

Resolución.

- $g_x = 2x$ y $g_y = -2y$, de donde $1 + g_x^2 + g_y^2 = 1 + 4x^2 + 4y^2 = 1 + 4r^2$.
- Sombra: disco $0 \leq r \leq \sqrt{2}$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$.
- $A = \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{2}} \sqrt{1 + 4r^2} r dr d\theta$.

Ejercicio 2B.6.2

← volver

- a) $\nabla u = (1, -4, 1)$, $\nabla v = (1, 0, -1)$, $\nabla w = (2, 1, 2)$. Productos punto: $1 + 0 - 1 = 0$, $2 - 4 + 2 = 0$, $2 + 0 - 2 = 0$: **ortogonal**.
- b) $|\nabla u| = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$, $|\nabla v| = \sqrt{2}$, $|\nabla w| = 3$; $\hat{e}_u = \frac{(1, -4, 1)}{3\sqrt{2}}$, $\hat{e}_v = \frac{(1, 0, -1)}{\sqrt{2}}$, $\hat{e}_w = \frac{(2, 1, 2)}{3}$.
- c) $u_u = \vec{u} \cdot \hat{e}_u = \frac{2-4+2}{3\sqrt{2}} = 0$; $u_v = \frac{2-2}{\sqrt{2}} = 0$; $u_w = \frac{4+1+4}{3} = 3$.
- $\vec{u} = 3 \hat{e}_w$.

Ejercicio 2B.6.3

← volver

- $\vec{r}_u = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ y $\vec{r}_v = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$; $\vec{r}_u \cdot \vec{r}_v = 0$: ortogonal.
- $h_u = h_v = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.
- $f_u = 4\sqrt{2}u^3v^3$ y $f_v = 3\sqrt{2}u^4v^2$.
- $\nabla f = \frac{4\sqrt{2}u^3v^3}{\sqrt{2}/2} \hat{e}_u + \frac{3\sqrt{2}u^4v^2}{\sqrt{2}/2} \hat{e}_v = 8u^3v^3 \hat{e}_u + 6u^4v^2 \hat{e}_v$.

Ejercicio 2B.6.4

← volver

- $x\hat{i} + y\hat{j} = \rho \hat{e}_\rho$ y $x^2 + y^2 = \rho^2$, así que $\vec{F} = \rho^3 \hat{e}_\rho + z \hat{e}_z$.
- $\nabla \cdot \vec{F} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho \cdot \rho^3)}{\partial \rho} + \frac{\partial z}{\partial z} = \frac{4\rho^3}{\rho} + 1 = 4\rho^2 + 1$.
- Comprobación en cartesianas: $P = x^3 + xy^2$, $Q = x^2y + y^3$, $R = z$; $P_x + Q_y + R_z = 4x^2 + 4y^2 + 1$.

Ejercicio 2B.6.5

← volver

- $\vec{r} = (u \cos \theta, v \sin \theta, u^2 + v^2)$.
- a) $\vec{e}_\theta = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} = (-u \sin \theta, v \cos \theta, 0)$. Su unitario es $\hat{e}_\theta = \frac{(-u \sin \theta, v \cos \theta, 0)}{\sqrt{u^2 \sin^2 \theta + v^2 \cos^2 \theta}}$.
- b) $\vec{r}_v = (0, \sin \theta, 2v)$, así que $h_v = \sqrt{\sin^2 \theta + 4v^2}$.
- c) Con $\vec{r}_u = (\cos \theta, 0, 2u)$: $J = \begin{vmatrix} \cos \theta & 0 & -u \sin \theta \\ 0 & \sin \theta & v \cos \theta \\ 2u & 2v & 0 \end{vmatrix}$.
- Desarrollando por la primera fila: $\cos \theta (0 - 2v^2 \cos \theta) - 0 + (-u \sin \theta)(0 - 2u \sin \theta) = 2u^2 \sin^2 \theta - 2v^2 \cos^2 \theta$.

Ejercicio 2B.6.6

← volver

- $\frac{1}{r} \frac{\partial(rF_r)}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^3 z + \frac{r^2}{2} \sin \theta \right) = 3rz + \sin \theta$.
- $\frac{1}{r} \frac{\partial F_\theta}{\partial \theta} = \frac{1}{r} (-r \sin \theta) = -\sin \theta$.
- $\frac{\partial F_z}{\partial z} = -3rz$.
- $\nabla \cdot \vec{F} = 3rz + \sin \theta - \sin \theta - 3rz = 0$: **el campo es solenoidal**.

Ejercicio 2B.6.7

← volver

Resolución.

- Cilindro de radio 3: $0 \leq \theta \leq 2\pi$, $0 \leq r \leq 3$, $0 \leq z \leq 4$.
- Integrando $\sqrt{x^2 + y^2} = r$; $dV = r dr d\theta dz$.
- $\int_0^{2\pi} \int_0^3 \int_0^4 r \cdot r dz dr d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^3 4r^2 dr d\theta$.
- En r : $4 \cdot \frac{3^3}{3} = 36$. En θ : $36 \cdot 2\pi$.

Resultado: 72π .

Ejercicio 4B.5.5 · Stokes con una curva en sentido horario

Adaptado de: 2º extraordinario 2024-2, problema 5.

Mediante el teorema de Stokes obtenga $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$, donde $\vec{F} = -y\hat{i} + x\hat{j} + \sin z \hat{k}$ y $C : \vec{r}(t) = \sin t \hat{i} + \cos t \hat{j} + 4 \hat{k}$.

Resolución.

- $\nabla \times \vec{F} = (0 - 0, 0 - 0, 1 - (-1)) = (0, 0, 2)$.
- C es la circunferencia de radio 1 en el plano $z = 4$. Superficie: el disco que encierra, con $\hat{n} = \hat{k}$.
- $(\nabla \times \vec{F}) \cdot \hat{k} = 2$, constante: $\iint_S 2 dS = 2\pi$ en sentido antihorario.
- Sentido:** $t = 0$ da $(0, 1)$ y $t = \frac{\pi}{2}$ da $(1, 0)$; la curva va de arriba hacia la derecha, en sentido **horario** visto desde arriba. El signo cambia.
- Comprobación directa: $\vec{F} \cdot \vec{r}' = (-\cos t)(\cos t) + (\sin t)(-\sin t) = -1$, y $\int_0^{2\pi} -1 dt = -2\pi$.

Resultado: -2π .

Ejercicio 4B.5.6 · Stokes en un plano inclinado

Adaptado de: 2º final 2024-1, tipo A, problema 5.

Calcule la circulación de $\vec{F} = (2x - 2y)\hat{i} + (y - z)\hat{j} + (x - z)\hat{k}$ en una vuelta, en sentido positivo, a la curva C de intersección del plano $2x + 2y - z = 0$ con el cilindro $x^2 + y^2 = 1$.

Resolución.

- $\nabla \times \vec{F} = (0 - (-1), 0 - 1, 0 - (-2)) = (1, -1, 2)$.
- Superficie: la porción del plano $z = 2x + 2y$ dentro del cilindro. $\vec{N} = (-2, -2, 1)$, hacia arriba (sentido positivo).
- $(\nabla \times \vec{F}) \cdot \vec{N} = -2 + 2 + 2 = 2$, constante.
- Sombra: disco de radio 1, de área π . Circulación $= 2\pi$.

Resultado: 2π .

Ejercicio 4B.5.7 · Gauss en un cono con tapa

Adaptado de: 1er final 2016-1, tipo A, problema 6.

Calcule el flujo neto de $\vec{F} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ a través de la superficie cerrada formada por el semicono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ y el plano $z = 3$.

Resolución.

- Cono más tapa: superficie cerrada, se aplica Gauss. $\nabla \cdot \vec{F} = 3$.
- Medidas: altura $h = 3$; en $z = 3$, $\sqrt{x^2 + y^2} = 3$, así que el radio es 3.

$$4. |\vec{r}'|^3 = 8e^{6\pi}, \text{ así que } \kappa = \frac{8e^{2\pi}}{8e^{6\pi}} = e^{-4\pi}.$$

Ejercicio 2A.6.3

← volver

- $4 \sin t = 4 \Rightarrow t_0 = \frac{\pi}{2}$. Comprobación: $1 - \sqrt{8} \cos \frac{\pi}{2} = 1$.
- $\vec{r}' = (\sqrt{8} \sin t, \sqrt{8} \cos t, 4 \cos t) \Rightarrow (2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}, 0); \vec{r}'' = (\sqrt{8} \cos t, \sqrt{8} \sin t, -4 \sin t) \Rightarrow (0, 0, -4)$.
- a) $|\vec{r}'| = \sqrt{8+8} = 4$, así que $\hat{T} = \frac{(2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}, 0)}{4} = \frac{(1, 1, 0)}{\sqrt{2}}$.
- $\vec{r}' \times \vec{r}'' = (-8\sqrt{2}, 8\sqrt{2}, 0)$, con norma 16.
- b) $\kappa = \frac{16}{4^3} = \frac{1}{4}$ y $\rho = 4$.
- c) Normal $(-1, 1, 0)$ por $(1, 1, 4)$: $-(x-1) + (y-1) = 0$, es decir, $x - y = 0$.

Ejercicio 2A.6.4

← volver

- $\cos t = 1, \sin t = 0 \Rightarrow t_0 = 0$. Comprobación: $1 + 0 + 1 = 2$.
- $\vec{r}' = (-\sin t, \cos t, -\sin t + \cos t) \Rightarrow (0, 1, 1); \vec{r}'' = (-\cos t, -\sin t, -\cos t - \sin t) \Rightarrow (-1, 0, -1)$.
- $\vec{r}' \times \vec{r}'' = ((1)(-1) - (1)(0), -[(0)(-1) - (1)(-1)], (0)(0) - (1)(-1)) = (-1, -1, 1)$, con norma $\sqrt{3}$.
- a) $\hat{T} = \frac{(0, 1, 1)}{\sqrt{2}}, \hat{B} = \frac{(-1, -1, 1)}{\sqrt{3}}$.
- $\hat{N} = \hat{B} \times \hat{T} = \frac{1}{\sqrt{6}}((-1)(1) - (1)(1), -[(-1)(1) - (1)(0)], (-1)(1) - (-1)(0)) = \frac{(-2, 1, -1)}{\sqrt{6}}$.
- b) Plano normal $(\perp \hat{T})$ por $(1, 0, 2)$: $y + (z - 2) = 0$, es decir, $y + z = 2$.

Ejercicio 2A.6.5

← volver

- $A(0, 0, 3)$ corresponde a $s = 0$. Sea $k = \frac{1}{\sqrt{10}}$.
- $\vec{r}' = (3k \cos ks, k, -3k \sin ks) \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{10}}(3, 1, 0)$, que ya es unitario: $\hat{T} = \frac{(3, 1, 0)}{\sqrt{10}}$.
- $\vec{r}'' = (-3k^2 \sin ks, 0, -3k^2 \cos ks) \Rightarrow (0, 0, -\frac{3}{10})$. Como s es longitud de arco, $\kappa = |\vec{r}''| = \frac{3}{10}$ y $\hat{N} = \frac{\vec{r}''}{|\vec{r}''|} = (0, 0, -1)$.
- $\hat{B} = \hat{T} \times \hat{N} = \frac{1}{\sqrt{10}}(3, 1, 0) \times (0, 0, -1) = \frac{(-1, 3, 0)}{\sqrt{10}}$.
- $\vec{r}''' = (-3k^3 \cos ks, 0, 3k^3 \sin ks) \Rightarrow (-3k^3, 0, 0) = (-\frac{3}{10\sqrt{10}}, 0, 0); \vec{r}' \times \vec{r}'' = (-3k^3, 9k^3, 0) = (-\frac{3}{10\sqrt{10}}, \frac{9}{10\sqrt{10}}, 0)$, con norma al cuadrado $\frac{90}{1000} = \frac{9}{100}$.
- $\tau = \frac{(\vec{r}' \times \vec{r}'') \cdot \vec{r}'''}{|\vec{r}' \times \vec{r}''|^2} = \frac{(-\frac{3}{10\sqrt{10}})(\frac{9}{10\sqrt{10}})}{\frac{9}{100}} = \frac{\frac{9}{1000}}{\frac{9}{100}} = \frac{1}{10}$.

Ejercicio 2A.6.6

← volver

- En $A(1, 5, 4)$: $4 - 3t^2 = 1 \Rightarrow t = 1$ (al despegar, $t \geq 0$).
- $\vec{r}' = (-6t, 0, 8t)$ y $|\vec{r}'| = \sqrt{36t^2 + 64t^2} = 10t$.
- $s(t) = \int_1^t 10u \, du = 5t^2 - 5$.

Ejercicio 4B.5.11 · Gauss con integración en cilíndricas

Adaptado de: 1er final 2024-1, tipo A, problema 6.

Obtenga el flujo neto de $\vec{F} = 4xyz \hat{i} + x^2y \hat{j} - 2yz^2 \hat{k}$ a través de la superficie cerrada formada por $z = 0$ y $z = 4 - x^2 - y^2$.

Resolución.

- $P_x = 4yz, Q_y = x^2, R_z = -4yz$: $\nabla \cdot \vec{F} = x^2$.
- Sólido: $0 \leq z \leq 4 - x^2 - y^2, 0 \leq r \leq 2, 0 \leq \theta \leq 2\pi$. Con $x^2 = r^2 \cos^2 \theta$:
- Flujo = $\int_0^{2\pi} \int_0^2 \int_0^{4-r^2} r^2 \cos^2 \theta \, r \, dz \, dr \, d\theta = \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta \, d\theta \int_0^2 (4r^3 - r^5) \, dr$.
- $\int_0^{2\pi} \cos^2 \theta \, d\theta = \pi$ y $\int_0^2 (4r^3 - r^5) \, dr = 16 - \frac{64}{6} = \frac{16}{3}$.

Resultado: $\frac{16\pi}{3}$.

Ejercicio 4B.5.12 · Campo en cilíndricas a través de una caja

Adaptado de: 2º extraordinario 2025-1, problema 6.

Calcule el flujo neto del campo $\vec{E}(r, \theta, z) = r \hat{e}_r + z \hat{e}_z$, expresado en coordenadas cilíndricas circulares, a través de la superficie cerrada de la caja $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 3, 0 \leq z \leq 4$.

Resolución.

- $F_r = r, F_\theta = 0, F_z = z$.
- $\frac{1}{r} \frac{\partial(r \cdot r)}{\partial r} = \frac{2r}{r} = 2; \frac{1}{r} \frac{\partial \theta}{\partial \theta} = 0; \frac{\partial z}{\partial z} = 1$. Entonces $\nabla \cdot \vec{E} = 3$.
- Comprobación: $r \hat{e}_r + z \hat{e}_z = x \hat{i} + y \hat{j} + z \hat{k}$, con divergencia $1 + 1 + 1 = 3$.
- $V = 1 \cdot 3 \cdot 4 = 12$. Flujo = $3 \cdot 12$.

Resultado: 36 (sin π : el sólido es una caja).

Ejercicio 4B.5.13 · ¿Entra o sale el fluido?

Adaptado de: 2º extraordinario 2025-2, problema 4.

Suponga que $\vec{F}(r, \theta, z) = r \cos \theta \hat{e}_r + r \sin \theta \hat{e}_\theta + z \hat{e}_z$ modela el flujo de un fluido. En el punto $A(17, \frac{2\pi}{3}, -2)$, ¿es más el fluido que entra del que sale?

Resolución.

- Término 1: $r F_r = r^2 \cos \theta$; derivado respecto a $r, 2r \cos \theta$; entre $r, 2 \cos \theta$.
- Término 2: $F_\theta = r \sin \theta$; derivado respecto a $\theta, r \cos \theta$; entre $r, \cos \theta$.
- Término 3: $\frac{\partial z}{\partial z} = 1$.
- $\nabla \cdot \vec{F} = 3 \cos \theta + 1$. Los valores $r = 17$ y $z = -2$ no intervienen.
- En $\theta = \frac{2\pi}{3}$: $3(-\frac{1}{2}) + 1 = -\frac{1}{2} < 0$.

Resultado: $\nabla \cdot \vec{F}(A) = -\frac{1}{2}$: el punto es un sumidero y **sí entra más fluido del que sale**.

Ejercicio 4B.5.14 · Campo radial unitario

Adaptado de: 2º final 2024-1, tipo A, problema 6 (repetido en el 3er extraordinario 2024-1).

Calcule el flujo neto de $\vec{F} = \frac{x \hat{i} + y \hat{j} + z \hat{k}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$ a través de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$.

Apéndice E · Resoluciones de los ejercicios propuestos

E.1 · Unidad 1 · Extremos de funciones de dos o más variables: Hessiano, Lagrange y problemas aplicados

Ejercicio 1.6.1

← volver

- $f_x = x^2 + 3x + 2 = (x+1)(x+2) = 0 \Rightarrow x = -1$ o $x = -2$; $f_y = 2y + 4 = 0 \Rightarrow y = -2$.
- $f_{xx} = 2x + 3$, $f_{yy} = 2$, $f_{xy} = 0$, de donde $D = 2(2x+3)$.
- $(-1, -2)$: $D = 2 > 0$ y $f_{xx} = 1 > 0$, **mínimo relativo**; $f = -\frac{1}{3} + \frac{3}{2} + 4 - 2 - 8 = -\frac{29}{6}$.
- $(-2, -2)$: $D = -2 < 0$, **punto silla**; $f = -\frac{14}{3}$.

Ejercicio 1.6.2

← volver

- $f_x = -2x + 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$; $f_y = 2y^2 - 8 = 0 \Rightarrow y = \pm 2$.
- $f_{xx} = -2$, $f_{yy} = 4y$, $f_{xy} = 0$, de donde $D = -8y$.
- $(\frac{1}{2}, -2)$: $D = 16 > 0$ y $f_{xx} = -2 < 0$, **máximo relativo**; $f = -\frac{16}{3} - \frac{1}{4} + 16 + \frac{1}{2} = \frac{131}{12}$.
- $(\frac{1}{2}, 2)$: $D = -16 < 0$, **punto silla**; $f = -\frac{125}{12}$.

Ejercicio 1.6.3

← volver

- $f_x = 4x^3 - 2x = 2x(2x^2 - 1) = 0 \Rightarrow x = 0$ o $x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$; $f_y = -2y + 5 = 0 \Rightarrow y = \frac{5}{2}$.
- $f_{xx} = 12x^2 - 2$, $f_{yy} = -2$, $f_{xy} = 0$, de donde $D = -2(12x^2 - 2)$.
- $(0, \frac{5}{2})$: $D = 4 > 0$ y $f_{xx} = -2 < 0$, **máximo relativo**; $f = -\frac{25}{4} + \frac{25}{2} - 2 = \frac{17}{4}$.
- $(\pm \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{5}{2})$: $f_{xx} = 4$, $D = -8 < 0$, **puntos silla**; $f = 4$.

Ejercicio 1.6.4

← volver

- $f_x = e^{-x}(2x - x^2 - y^2)$ y $f_y = 2ye^{-x}$. Como $e^{-x} \neq 0$: $y = 0$ y $x(2 - x) = 0$.
- Puntos críticos: $(0, 0)$ y $(2, 0)$.
- $f_{xx} = e^{-x}(x^2 + y^2 - 4x + 2)$, $f_{yy} = 2e^{-x}$, $f_{xy} = -2ye^{-x}$.
- $(0, 0)$: $f_{xx} = 2$, $f_{yy} = 2$, $f_{xy} = 0$; $D = 4 > 0$, **mínimo relativo**, con $f = 0$.
- $(2, 0)$: $f_{xx} = -2e^{-2}$, $f_{yy} = 2e^{-2}$, $f_{xy} = 0$; $D = -4e^{-4} < 0$, **punto silla**, con $f = 4e^{-2}$.

Ejercicio 1.6.5

← volver

- $f_x = \frac{9}{2}x^2 + 9x = \frac{9}{2}x(x+2) = 0 \Rightarrow x = 0$ o $x = -2$; $f_y = 4y - 4 = 0 \Rightarrow y = 1$; $f_z = -2z + 2 = 0 \Rightarrow z = 1$.
- $H = \text{diag}(9x+9, 4, -2)$: $\Delta_1 = 9x+9$, $\Delta_2 = 4(9x+9)$, $\Delta_3 = -8(9x+9)$.
- $(0, 1, 1)$: $(9, 36, -72)$, signos $(+, +, -)$, **punto silla**; $f = 2 - 1 - 4 + 2 + 9 = 8$.
- $(-2, 1, 1)$: $(-9, -36, 72)$, signos $(-, -, +)$, **punto silla**; $f = -12 + 2 - 1 + 18 - 4 + 2 + 9 = 14$.

Ejercicio 1.6.6

← volver

- $f_x = -4x(x^2 - 4) = 0 \Rightarrow x = 0$ o $x = \pm 2$; $f_y = 2(y+1) = 0 \Rightarrow y = -1$; $f_z = 2z = 0 \Rightarrow z = 0$.

Ejercicio propuesto 4B.6.5

Adaptado de: 1er final 2018-1, tipo A, problema 6, repetido en el tipo B.

Calcule el flujo neto de $\vec{F} = (x^3 + \ln z)\hat{i} + (e^x - 3x^2y)\hat{j} + (\cos x + z)\hat{k}$ a través de la superficie cerrada formada por $z = 0$, $y + z = 16$ y $x^2 + y^2 = 4$.

Resultado: 64π .

→ Resolución en el Apéndice E, p. 99.

Ejercicio propuesto 4B.6.6

Adaptado de: 2º final 2017-2, tipo A, problema 6.

Calcule el flujo neto de $\vec{F} = (x^2 - yz)\hat{i} + (z^2 - 2xy)\hat{j} + (z^2 - xy)\hat{k}$ a través de la superficie cerrada limitada por el semicono $x^2 + y^2 - z^2 = 0$, $z \geq 0$, y el plano $z = 3$.

Resultado: $\frac{81\pi}{2}$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 99.

Ejercicio propuesto 4B.6.7

Adaptado de: 1er final 2018-2, tipo A, problema 6.

Sea S la superficie $9x^2 + 9y^2 + 4z^2 = 36$ y sea $\vec{F} = (\sin z - y^2x)\hat{i} + (\cos z - x^2y)\hat{j} + (4z - e^{xy})\hat{k}$. Calcule el flujo neto de $\vec{F}$ a través de S .

Resultado: $\frac{192\pi}{5}$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 99.

Ejercicio propuesto 4B.6.8

Adaptado de: 1er final 2016-1, tipo A, problema 5.

Calcule $\iiint_D \sqrt{x^2 + y^2} dV$ en la región D limitada por $x^2 + y^2 = 16$, $z = -5$ y $z = 4$.

Resultado: 384π .

→ Resolución en el Apéndice E, p. 100.

Ejercicio propuesto 4B.6.9

Adaptado de: 2º final 2016-1, tipo A, problema 6.

Calcule el área de la parte de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ localizada en el primer octante y limitada por los planos $x = 0$, $y = x$ y $z = 0$.

Resultado: $4\pi u^2$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 100.

Ejercicio propuesto 4B.6.10

Adaptado de: 1er final 2017-1, tipo A, problema 6.

Calcule el área del cilindro $y = x^2$ limitada por el primer octante y por los planos $x = 1$ y $z = x$.

Resultado: $\frac{5\sqrt{5}-1}{12} u^2$.

Apéndice C · Fe de erratas

Diferencias entre las resoluciones publicadas de los exámenes y los valores verificados en este cuaderno.

C.1 · Unidad 1 · Extremos de funciones de dos o más variables: Hessiano, Lagrange y problemas aplicados

Sin erratas registradas en esta unidad.

C.2A · Unidad 2 · Parte A · Funciones vectoriales: curvas, triedro móvil, curvatura, torsión y normal a una superficie

Guía de extraordinario de 1986, grupo 6, ejercicio 1 (propuesto 2A.6.8): en la resolución publicada aparecen $t = 1$, $s = 2$, el vector normal $-2\hat{i} + 17\hat{j} + 7\hat{k}$, el plano tangente $2x - 17y - 7z + 98 = 0$ y la recta normal $\frac{x-1}{-2} = \frac{y+4}{17} = \frac{z+4}{7}$. El valor verificado es $s = 2$, $t = -1$, $\vec{N} = (10, -1, 7)$, el plano $10x - y + 7z + 14 = 0$ y la recta $\frac{x-1}{10} = \frac{y+4}{-1} = \frac{z+4}{7}$.

Guía de extraordinario de 1986, grupo 7, ejercicio 2 (propuesto 2A.6.9): en la resolución publicada aparecen $\vec{N}_1 \times \vec{N}_2 = -4\hat{i} + 12\hat{j}$ y la recta $\frac{x-3}{-4} = \frac{y-2}{12}$, $z = -6$. El valor verificado es $\vec{N}_1 \times \vec{N}_2 = (48, -72, 0)$, paralelo a $(2, -3, 0)$, y la recta $\frac{x-3}{2} = \frac{y-2}{-3}$, $z = -6$.

C.2B · Unidad 2 · Parte B · Funciones vectoriales: coordenadas curvilíneas, gradiente, divergencia, rotacional y laplaciano

Sin erratas registradas en esta unidad.

C.3 · Unidad 3 · Integrales de línea: trabajo, campo conservativo y función potencial

1er extraordinario 2018-2, problema 3 (propuesto 3.6.9): en la resolución publicada aparece $W = -2$ u.t., al evaluar la función potencial como $1 - (2 + 1)$. El valor verificado es $W = -1$: con $\varphi = \frac{z}{r} \sec^2 \theta$, $\varphi(B) = 1$ y $\varphi(A) = 2$.

C.4A · Unidad 4 · Parte A · Integrales múltiples: integrales dobles, áreas, volúmenes, cambio de variable y teorema de Green

1er final 2018-2, tipo A, problema 5 (propuesto 4A.6.6): en la resolución publicada aparece 7π , porque se integró θ de 0 a 2π . La región solo tiene $y \geq 0$, así que θ va de 0 a π ; el valor verificado es $\frac{7\pi}{2}$.

C.4B · Unidad 4 · Parte B · Integrales múltiples: integrales de superficie, integrales triples y teoremas de Stokes y Gauss

Sin erratas registradas en esta unidad.

7. **Campo $\vec{r}/|\vec{r}|$:** no tiene divergencia constante; el flujo por la esfera es su área, $4\pi a^2$.
8. **Orientación:** «hacia la parte negativa del eje Z » cambia el signo de $\vec{N} = (-g_x, -g_y, 1)$.
9. **Sentido en Stokes:** revisa la parametrización con dos valores de t . (sen t , cos t) va en sentido horario.
10. **Olvidar el jacobiano:** $dV = r dr d\theta dz$ en cilíndricas y $\rho^2 \sin \phi d\rho d\phi d\theta$ en esféricas; en la esfera, $dS = a^2 \sin \phi d\phi d\theta$.
11. **Simetría mal usada:** $\iiint x dV = 0$ solo si el sólido es simétrico respecto al plano $x = 0$. En un octante no se anula.
12. **Signo de la divergencia:** negativa significa que entra más fluido del que sale; positiva, que sale más.

4B.8 Formulario de emergencia de la unidad

- $z = g(x, y)$: $\vec{N} = (-g_x, -g_y, 1)$, $dS = \sqrt{1 + g_x^2 + g_y^2} dA$ · paramétrica: $\vec{N} = \vec{r}_u \times \vec{r}_v$.
- Esfera: $dS = a^2 \sin \phi d\phi d\theta$, $\hat{n} = \vec{r}/a$ · cilindro: $dS = a d\theta dz$.
- Flujo: $\iint_S \vec{F} \cdot \hat{n} dS = \iint_D \vec{F} \cdot (\vec{r}_u \times \vec{r}_v) du dv$.
- dV : cilíndricas $r dr d\theta dz$; esféricas $\rho^2 \sin \phi d\rho d\phi d\theta$.
- Divergencia: $P_x + Q_y + R_z$ · cilíndricas: $\frac{1}{r} \partial_r(rF_r) + \frac{1}{r} \partial_\theta F_\theta + \partial_z F_z$.
- Gauss: $\iiint_V \vec{F} \cdot \hat{n} dS = \iiint_V \nabla \cdot \vec{F} dV$ (cerrada, normal exterior).
- Rotacional: $(R_y - Q_z, P_z - R_x, Q_x - P_y)$ · Stokes: $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_S (\nabla \times \vec{F}) \cdot \hat{n} dS$ (antihoraria desde arriba con normal hacia arriba).
- Esfera $\frac{4}{3}\pi a^3$, área $4\pi a^2$ · cilindro $\pi r^2 h$ · cono $\frac{1}{3}\pi r^2 h$ · paraboloide $z = h - r^2$: $\frac{1}{2}\pi h^2$.
- $\int r\sqrt{1 + 4r^2} dr = \frac{(1+4r^2)^{3/2}}{12} \cdot \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta d\theta = \pi \cdot \int_0^\pi \sin \phi d\phi = 2$.

4B.9 Procedimiento recomendado en el examen

1. Escribe qué tipo de problema es: área o integral de superficie, flujo directo, triple, Gauss o Stokes.
2. Para un flujo: ¿la superficie es cerrada? Si sí, escribe el teorema de Gauss y calcula la divergencia término por término.
3. Con divergencia constante: medidas del sólido, volumen de tabla y producto. Con divergencia variable: simetría primero, luego la integral triple en cilíndricas o esféricas.
4. Para Stokes: rotacional, superficie más sencilla, $\vec{N}$, producto punto y **sentido** de la curva.
5. Escribe el elemento (dS o dV) con su factor antes de poner límites.
6. Recuadra el resultado exacto y, si es un flujo, di si sale o entra.

Si no se encuentra el camino, escribe el teorema que corresponde, la divergencia o el rotacional calculados y la integral planteada con sus límites. Solo eso ya vale cerca de la mitad del problema.

Examen	Problemas
1er final 2017-2, tipo A	rectángulo inscrito con Lagrange · curvatura, torsión, plano osculador, a_T y a_N · constantes para campo irrotacional · trabajo en polares · Green · circulación
1er final 2017-2, tipo C	distancia mínima con Lagrange · constantes para una función armónica · curvatura y radio de torsión · integral de línea sobre una elipse · Stokes · flujo con Gauss
2º final 2017-2, tipo A	puntos críticos · transformación y jacobiano · función armónica, campo solenoidal e irrotacional · integral de línea en cilíndricas · circulación · flujo con Gauss
1er final 2018-1, tipo A (el tipo B trae los mismos problemas en otro orden)	distancia mínima a un plano · triedro y torsión de una intersección · campo solenoidal e irrotacional en cilíndricas · trabajo en cilíndricas · integral de línea cerrada · flujo con Gauss
2º final 2018-1, tipo A	caja con tapa · triedro, curvatura, centro de curvatura y plano osculador · laplaciano · integral de línea en cilíndricas sobre una circunferencia · Stokes · flujo con Gauss
1er final 2018-2, tipo A	caja sin tapa con Lagrange · a_T y a_N · radio y circunferencia de curvatura · trabajo sobre una curva cerrada con campo conservativo · Green · flujo por un elipsoide
1er final 2018-2, tipo C	caja inscrita en un paraboloide · longitud de arco · transformación lineal y gradiente · trabajo con campo conservativo · volumen · Green
2º final 2018-2, tipo A (repetido en el 2º extraordinario 2018-2)	Lagrange · ángulo entre una curva y una superficie paramétrica · transformación ortogonal y divergencia · constante para campo conservativo y potencial · área con integral doble · Stokes
1er final 2024-1, tipo A (el tipo B cambia los datos)	puntos críticos · posición tras recorrer una longitud de arco · transformación lineal y jacobiano · trabajo · integral doble en polares · flujo con Gauss
1er final 2024-2	distancia mínima con Lagrange · curvatura · transformación lineal en 3 variables · trabajo · área con integral doble
2º final 2024-2, tipo A	puntos críticos en 3 variables · a_T y a_N · gradiente en curvilíneas · trabajo · integral de superficie
1er final 2025-1, tipo A	extremos en una región cerrada · hélice: longitud de arco y triedro · transformación lineal · trabajo por dos trayectorias · área de un pétalo en polares · Stokes
2º final 2025-1, tipo A	puntos críticos · tangente, curvatura y plano osculador · transformación y jacobiano · trabajo en polares · integral doble en polares · flujo con Gauss
1er final 2025-2, tipo A	caja inscrita en un elipsoide · triedro, curvatura y torsión · transformación lineal y área imagen · trabajo · volumen bajo una superficie

Tema	Expresiones
Superficie, triples, Stokes y Gauss (U4B)	$dV = r dr d\theta dz \cdot dV = \rho^2 \sin \phi d\rho d\phi d\theta \cdot \text{área:}$ $\iint \sqrt{1 + g_x^2 + g_y^2} dA \cdot z = g(x, y): \vec{N} = (-g_x, -g_y, 1) \cdot \text{Gauss:}$ $\oiint \vec{F} \cdot \hat{n} dS = \iiint \nabla \cdot \vec{F} dV \cdot \text{Stokes: } \oint \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint (\nabla \times \vec{F}) \cdot \vec{N} dA$

$$4. \text{ En } r: \left[\frac{(1+4r^2)^{3/2}}{12} \right]_0^{\sqrt{2}} = \frac{9^{3/2}-1}{12} = \frac{27-1}{12} = \frac{13}{6}.$$

$$5. \text{ En } \theta: \frac{13}{6} \cdot 2\pi.$$

$$\text{Resultado: } A = \frac{13\pi}{3} \text{ u}^2.$$

Ejercicio 4B.5.2 · Integral de superficie sobre un octante de esfera

Adaptado de: 2º final 2024-2, tipo A, problema 5.

Calcule $\iint_S xz \, dS$, donde S es la porción de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ con $x \geq 0$, $y \geq 0$ y $z \geq 0$.

Resolución.

1. Parametrización: $x = 3 \sin \phi \cos \theta$, $y = 3 \sin \phi \sin \theta$, $z = 3 \cos \phi$, con $0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}$, $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$; $dS = 9 \sin \phi \, d\phi \, d\theta$.
2. $xz \, dS = (3 \sin \phi \cos \theta)(3 \cos \phi)(9 \sin \phi) \, d\phi \, d\theta = 81 \sin^2 \phi \cos \phi \cos \theta \, d\phi \, d\theta$.
3. Se separa: $81 \int_0^{\pi/2} \cos \theta \, d\theta \int_0^{\pi/2} \sin^2 \phi \cos \phi \, d\phi = 81 \cdot 1 \cdot \left. \frac{\sin^3 \phi}{3} \right|_0^{\pi/2} = 81 \cdot \frac{1}{3}$.

Resultado: 27.

Ejercicio 4B.5.3 · Flujo directo por un paraboloides

Adaptado de: 1er extraordinario 2024-1, problema 5.

Calcule el flujo del campo eléctrico $\vec{E} = y\hat{i} - x\hat{j} + (z+1)\hat{k}$ a través de la superficie $x^2 + y^2 + z = 2$, donde $z \geq -2$. La superficie se orienta hacia la parte negativa del eje Z .

Resolución.

1. La superficie es $z = g = 2 - x^2 - y^2$ y **no es cerrada**: Gauss no se aplica directo.
2. Normal hacia arriba: $(-g_x, -g_y, 1) = (2x, 2y, 1)$. Hacia abajo: $\vec{N} = (-2x, -2y, -1)$.
3. Sobre la superficie, $z+1 = 3 - x^2 - y^2$. Entonces $\vec{E} \cdot \vec{N} = -2xy + 2xy - (3 - x^2 - y^2) = -(3 - r^2)$.
4. Sombra: $z = -2 \Rightarrow x^2 + y^2 = 4$, disco $r \leq 2$.
5. Flujo = $\int_0^{2\pi} \int_0^2 -(3 - r^2) r \, dr \, d\theta = -2\pi \left[\frac{3r^2}{2} - \frac{r^4}{4} \right]_0^2 = -2\pi(6 - 4) = -4\pi$.
6. **Comprobación con Gauss:** $\nabla \cdot \vec{E} = 0 + 0 + 1 = 1$. Se cierra con la tapa $z = -2$, $r \leq 2$. El volumen encerrado es $\int_0^{2\pi} \int_0^2 (4 - r^2) r \, dr \, d\theta = 8\pi$. En la tapa, la normal exterior es $-\hat{k}$ y $\vec{E} \cdot (-\hat{k}) = -(z+1) = 1$, así que su flujo es 4π . Por el paraboloides hacia afuera (arriba): $8\pi - 4\pi = 4\pi$; hacia abajo, -4π .

Resultado: -4π (con la orientación hacia arriba sería 4π).

Ejercicio 4B.5.4 · Integral triple en cilíndricas

Adaptado de: 1er extraordinario 2026-1, problema 5.

Calcule $\iiint_V \sqrt{x^2 + y^2} \, dV$, donde V es el sólido acotado por $z = 0$, $z = 4$ y $x^2 + y^2 = 9$.

1. En esféricas, $f = \rho^5$, que solo depende de ρ .

$$2. \nabla^2 f = \frac{1}{\rho^2} \frac{d}{d\rho} (\rho^2 \cdot 5\rho^4) = \frac{30\rho^5}{\rho^2} = 30\rho^3.$$

3. En $B(1, 1, 0)$: $\rho = \sqrt{2}$ y $\rho^3 = 2\sqrt{2}$, así que $\nabla^2 f = 60\sqrt{2}$.

Ejercicio 2B.6.8

← volver

1. $\vec{r}_u = (2, -4)$ y $\vec{r}_v = (6, 3)$; $\vec{r}_u \cdot \vec{r}_v = 12 - 12 = 0$: ortogonal.

2. $h_u = \sqrt{20}$ y $h_v = \sqrt{45}$.

3. $f_u = 2$ y $f_v = 2v$. Como $\frac{1}{h_u} \hat{e}_u = \frac{\vec{r}_u}{h_u^2}$: $\nabla f = \frac{2}{20}(2, -4) + \frac{2v}{45}(6, 3) = \left(\frac{1}{5} + \frac{4v}{15}, -\frac{2}{5} + \frac{2v}{15} \right)$.

4. En $v = 2$: $\nabla f = \left(\frac{3}{15} + \frac{8}{15}, -\frac{6}{15} + \frac{4}{15} \right) = \frac{11}{15}\hat{i} - \frac{2}{15}\hat{j}$.

E.3 · Unidad 3 · Integrales de línea: trabajo, campo conservativo y función potencial

Ejercicio 3.6.1

← volver

1. $R_y - Q_z = 0 - 0 = 0$.

2. $R_x = -2z$ y $P_z = -2z$, así que $-(R_x - P_z) = 0$.

3. $Q_x = -\sin y - 2y \sin x$ y $P_y = -\sin y - 2y \sin x$, así que $Q_x - P_y = 0$.

4. El rotacional es nulo en todo $\mathbb{R}^3$ y la curva es cerrada: $W = 0$. No hace falta parametrizar la hipocicloide.

5. Comprobación: $\varphi = x \cos y + y^2 \cos x - xz^2 - 2y + z$ cumple $\nabla \varphi = \vec{F}$.

Ejercicio 3.6.2

← volver

1. En cilíndricas: $\vec{F} \cdot d\vec{r} = rz^2 \sin^2 \theta \, dr + r(rz^2 \sin \theta \cos \theta) \, d\theta + r^2 z \sin^2 \theta \, dz$.

2. $\varphi = \int rz^2 \sin^2 \theta \, dr = \frac{1}{2} r^2 z^2 \sin^2 \theta + g(\theta, z)$.

3. $\varphi_\theta = r^2 z^2 \sin \theta \cos \theta + g_\theta$, que coincide con rF_θ si $g_\theta = 0$; $\varphi_z = r^2 z \sin^2 \theta + g_z$, que coincide con F_z si $g_z = 0$. Entonces $\varphi = \frac{1}{2} r^2 z^2 \sin^2 \theta$.

4. $\varphi(A) = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 4 \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 = 1$ y $\varphi(B) = 0$, porque $\sin 0 = 0$.

5. $W = 0 - 1 = -1$.

Ejercicio 3.6.3

← volver

1. $\vec{F} \cdot d\vec{r} = F_r \, dr + F_\theta \, r \, d\theta = \theta \, dr - r \, d\theta$.

2. No es diferencial exacta: de $\varphi_r = \theta$ sale $\varphi = r\theta + g(\theta)$, y entonces $\varphi_\theta = r + g'(\theta)$, que nunca es igual a $-r$. Hay que integrar sobre el arco.

3. Sobre el arco $r = 2$: $dr = 0$ y θ va de 0 a $\frac{\pi}{2}$.

$$4. W = \int_0^{\pi/2} (-2) \, d\theta = -\pi.$$

Ejercicio 3.6.4

← volver

1. Cada componente depende solo de su variable, así que el rotacional es nulo: $\varphi = \frac{1}{3}(x^3 + y^3 + z^3)$.

$$3. V = \frac{1}{3}\pi(3)^2(3) = 9\pi.$$

$$4. \text{Flujo} = 3 \cdot 9\pi.$$

Resultado: 27π .

Ejercicio 4B.5.8 · Radio de la esfera a partir del flujo

Adaptado de: 1er extraordinario 2025-2, problema 6.

Sean $\vec{F} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ y la superficie cerrada $S : x^2 + y^2 + z^2 = a^2, a > 0$. Determine a para que el flujo de $\vec{F}$ a través de S sea 32π .

Resolución.

$$1. \nabla \cdot \vec{F} = 3 \text{ y } V = \frac{4}{3}\pi a^3.$$

$$2. \text{Flujo} = 3 \cdot \frac{4}{3}\pi a^3 = 4\pi a^3.$$

$$3. 4\pi a^3 = 32\pi \Rightarrow a^3 = 8.$$

Resultado: $a = 2$ (la única raíz real positiva).

Ejercicio 4B.5.9 · Divergencia no constante y simetría

Adaptado de: 1er extraordinario 2024-2, problema 6 (repetido en el 1er extraordinario 2025-1).

Calcule el flujo de $\vec{F} = (xy - z^2)\hat{i} + (x^2 + y^2)\hat{j} + (z^2 - x)\hat{k}$ a través de la esfera $\vec{r}(\theta, \phi) = (2 \cos \theta \sin \phi, 2 \sin \theta \sin \phi, 2 \cos \phi)$.

Resolución.

1. La parametrización es la esfera de radio 2 centrada en el origen: superficie cerrada.

2. $P_x = y, Q_y = 2y, R_z = 2z$, así que $\nabla \cdot \vec{F} = 3y + 2z$, que **no** es constante.

3. $\text{Flujo} = 3 \iiint_V y dV + 2 \iiint_V z dV$.

4. La bola es simétrica respecto a los planos $y = 0$ y $z = 0$: las dos integrales valen 0.

Resultado: el flujo es 0.

Ejercicio 4B.5.10 · Cilindro cortado por un plano inclinado

Adaptado de: 2º extraordinario 2025-2, problema 6.

Determine el flujo de $\vec{F} = z^2 \ln y \hat{i} + 2y \hat{j} + e^x \hat{k}$ a través de la superficie cerrada formada por el cilindro $x^2 + y^2 = 16$ limitado por los planos $z = 2x + 2y + 6$ y $z = -2$.

Resolución.

1. $P_x = 0$ (no hay x), $Q_y = 2, R_z = 0$ (no hay z): $\nabla \cdot \vec{F} = 2$.

2. El volumen no es de tabla: $V = \iint_{r \leq 4} [(2x + 2y + 6) - (-2)] dA = \iint_{r \leq 4} (2x + 2y + 8) dA$.

3. El disco está centrado en el origen: $\iint x dA = \iint y dA = 0$. Queda $V = 8 \cdot \pi(4)^2 = 128\pi$.

4. $\text{Flujo} = 2 \cdot 128\pi$.

Resultado: 256π .

El enunciado tiene dos detalles: $\ln y$ no está definido para $y \leq 0$, y el plano inclinado queda por debajo de $z = -2$ donde $x + y < -4$. El problema se resuelve formalmente con el teorema de Gauss, como arriba.

$$4. 5t^2 - 5 = 40 \Rightarrow t^2 = 9 \Rightarrow t = 3.$$

$$5. \vec{r}(3) = (4 - 27, 5, 36) = (-23, 5, 36).$$

Ejercicio 2A.6.7

← volver

1. Parametriza con $x = t: \vec{r}(t) = (t, t, 2t^2)$; el origen es $t_0 = 0$.

2. $\vec{r}' = (1, 1, 4t) \Rightarrow (1, 1, 0); \vec{r}'' = (0, 0, 4)$.

3. $\vec{r}' \times \vec{r}'' = (4, -4, 0)$, con norma $4\sqrt{2}$; $|\vec{r}'| = \sqrt{2}$.

4. a) $\hat{T} = \frac{(1,1,0)}{\sqrt{2}}, \hat{B} = \frac{(1,-1,0)}{\sqrt{2}}, \hat{N} = \hat{B} \times \hat{T} = (0, 0, 1)$.

5. b) $\kappa = \frac{4\sqrt{2}}{(\sqrt{2})^3} = \frac{4\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = 2$.

6. c) $\rho = \frac{1}{2}$; centro $= (0, 0, 0) + \frac{1}{2}(0, 0, 1) = (0, 0, \frac{1}{2})$.

7. d) Normal $(1, -1, 0)$ por el origen: $x - y = 0$.

Ejercicio 2A.6.8

← volver

1. $2s + 3t = 1$ y $-s + 2t = -4$. De la segunda, $s = 2t + 4$; en la primera, $7t + 8 = 1$, así que $t = -1$ y $s = 2$.

2. $z = 2(-1)^2 - 3(2) = -4$; el punto es $(1, -4, -4)$.

3. $\vec{r}_s = (2, -1, -3)$ y $\vec{r}_t = (3, 2, 4t) = (3, 2, -4)$.

4. $\vec{N} = \vec{r}_s \times \vec{r}_t = ((-1)(-4) - (-3)(2), -[(2)(-4) - (-3)(3)], (2)(2) - (-1)(3)) = (10, -1, 7)$.

5. Plano: $10(x - 1) - (y + 4) + 7(z + 4) = 0$, es decir, $10x - y + 7z + 14 = 0$.

6. Recta normal: $\frac{x-1}{10} = \frac{y+4}{-1} = \frac{z+4}{7}$.

Ejercicio 2A.6.9

← volver

1. El punto está en las dos superficies: $9 + 4 + 36 = 49$ y $9 + 4 = 13$.

2. $\vec{N}_1 = \nabla(x^2 + y^2 + z^2) = (2x, 2y, 2z) = (6, 4, -12)$ y $\vec{N}_2 = \nabla(x^2 + y^2) = (2x, 2y, 0) = (6, 4, 0)$.

3. $\vec{N}_1 \times \vec{N}_2 = ((4)(0) - (-12)(4), -[(6)(0) - (-12)(6)], (6)(4) - (4)(6)) = (48, -72, 0) = 24(2, -3, 0)$.

4. Recta por $(3, 2, -6)$ con dirección $(2, -3, 0)$: $\frac{x-3}{2} = \frac{y-2}{-3}, z = -6$.

E.2B · Unidad 2 · Parte B · Funciones vectoriales: coordenadas curvilíneas, gradiente, divergencia, rotacional y laplaciano

Ejercicio 2B.6.1

← volver

1. a) $\nabla u = (1, -2)$ y $\nabla v = (1, 2)$; $\nabla u \cdot \nabla v = 1 - 4 = -3 \neq 0$: **no es ortogonal**.

2. b) $J\left(\frac{u,v}{x,y}\right) = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 + 2 = 4$, de donde $J\left(\frac{x,y}{u,v}\right) = \frac{1}{4}$.

3. c) Sumando, $u + v = 2x$; restando, $v - u = 4y$. Inversa: $x = \frac{u+v}{2}, y = \frac{v-u}{4}$.

4. d) $\vec{r}_u = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right)$ y $\vec{r}_v = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$; $h_u = h_v = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{16}} = \frac{\sqrt{5}}{4}$.

5. e) $\hat{e}_u = \frac{\vec{r}_u}{h_u} = \frac{(2,-1)}{\sqrt{5}}$ y $\hat{e}_v = \frac{(2,1)}{\sqrt{5}}$. Como el sistema no es ortogonal, $\hat{e}_u \cdot \hat{e}_v = \frac{3}{5} \neq 0$.

Resolución.

1. $\vec{F} = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$: su divergencia no es constante y no está definida en el origen, que está dentro de la esfera. Se calcula directo.
2. Radio $a = 2$. En la esfera, $|\vec{r}| = 2$ y $\hat{n} = \frac{\vec{r}}{2}$.
3. $\vec{F} \cdot \hat{n} = \frac{\vec{r}}{2} \cdot \frac{\vec{r}}{2} = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{4} = 1$.
4. Flujo $= 1 \cdot \text{Área} = 4\pi(2)^2$.

Resultado: 16π .**4B.6 Ejercicios propuestos**

Resuélvelos sin ver la solución. Las resoluciones completas están en el **Apéndice E, sección E.4B**.

Ejercicio propuesto 4B.6.1

Adaptado de: 1er extraordinario 2018-1, tipo A, problema 6.

Calcule el flujo de $\vec{F} = 3x\hat{i} + 2y\hat{j} + 4z\hat{k}$ a través de la superficie $x^2 + y^2 + z^2 = 25$.

Resultado: 1500π .

→ Resolución en el Apéndice E, p. 99.

Ejercicio propuesto 4B.6.2

Adaptado de: 1er extraordinario 2018-2, problema 6.

Calcule el flujo de $\vec{F} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ a través de la superficie cerrada formada por el cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ y el plano $z = 2$.

Resultado: 8π .

→ Resolución en el Apéndice E, p. 99.

Ejercicio propuesto 4B.6.3

Adaptado de: 2º final 2025-1, tipo A, problema 6.

Calcule el flujo neto de $\vec{F} = (x^2y^2 + 3x)\hat{i} + (-\frac{2}{3}xy^3 + 3y)\hat{j} + 3z\hat{k}$ a través de la superficie cerrada de un cilindro circular recto con tapas, de radio 2 y altura 8.

Resultado: 288π .

→ Resolución en el Apéndice E, p. 99.

Ejercicio propuesto 4B.6.4

Adaptado de: 2º final 2025-2, tipo A, problema 6.

Utilizando el teorema de la divergencia, calcule $\oint_S \vec{F} \cdot \hat{n} dS$ para $\vec{F} = z\hat{i} + x^2y\hat{j} + y^2z\hat{k}$, donde S está formada por el cilindro $x^2 + y^2 = 4$ y los planos $z = -1$ y $z = 1$.

Resultado: 16π .

→ Resolución en el Apéndice E, p. 99.

2. $H = \text{diag}(16 - 12x^2, 2, 2)$.
3. $(0, -1, 0)$: $(16, 32, 64)$, **mínimo relativo**; $f = -(0 - 4)^2 = -16$.
4. $(\pm 2, -1, 0)$: $(-32, -64, -128)$, signos $(-, -, -)$, **puntos silla**; $f = 0$.

Ejercicio 1.6.7

← volver

1. Vértice (x, y, z) en el primer octante, sobre el elipsoide; lados $2x, 2y, z$. Objetivo $V = 4xyz$; restricción $g = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} = 1$.
2. $\nabla V = \lambda \nabla g$: $4yz = \frac{\lambda x}{2}$, $4xz = \frac{\lambda y}{2}$, $4xy = \frac{2\lambda z}{9}$.
3. Multiplicando cada ecuación por su variable: $4xyz = \frac{\lambda x^2}{2} = \frac{\lambda y^2}{2} = \frac{2\lambda z^2}{9}$. De ahí $x = y$ y $z^2 = \frac{9}{4}x^2$.
4. En la restricción: $\frac{x^2}{4} + \frac{x^2}{4} + \frac{x^2}{4} = 1 \Rightarrow x^2 = \frac{4}{3} \Rightarrow x = y = \frac{2\sqrt{3}}{3}$, $y z = \frac{3}{2}x = \sqrt{3}$.
5. Lados: $\frac{4\sqrt{3}}{3} \times \frac{4\sqrt{3}}{3} \times \sqrt{3}$; $V = 4 \cdot \frac{4}{3} \cdot \sqrt{3} = \frac{16\sqrt{3}}{3}$.

Ejercicio 1.6.8

← volver

1. Objetivo $d^2 = x^2 + y^2 + z^2$; restricción $g = z - 4x^2 + 4y^2 = 5$.
2. $\nabla d^2 = \lambda \nabla g$: $2x = -8\lambda x$, $2y = 8\lambda y$, $2z = \lambda$.
3. Factoriza: $2x(1 + 4\lambda) = 0$ y $2y(1 - 4\lambda) = 0$.
4. Caso $x = 0, y = 0$: $z = 5, d = 5$.
5. Caso $x = 0, \lambda = \frac{1}{4}$: $z = \frac{1}{8}y + 4y^2 = 5 \Rightarrow y^2 = \frac{39}{32} = \frac{78}{64}$, $y = \pm \frac{\sqrt{78}}{8}$; $d^2 = \frac{78}{64} + \frac{1}{64} = \frac{79}{64}$.
6. Caso $\lambda = -\frac{1}{4}, y = 0$: $z = -\frac{1}{8}y - \frac{1}{8} - 4x^2 = 5$, imposible.
7. Comparación: $\frac{\sqrt{79}}{8} \approx 1.11 < 5$. **Punto** $(0, \pm \frac{\sqrt{78}}{8}, \frac{1}{8})$, **distancia** $\frac{\sqrt{79}}{8}$.

E.2A · Unidad 2 · Parte A · Funciones vectoriales: curvas, triedro móvil, curvatura, torsión y normal a una superficie**Ejercicio 2A.6.1**

← volver

1. $t^2 = 1, -t = -1$ y $-t^2 = -1$ dan $t_0 = 1$.
2. $\vec{v} = (2t, -1, -2t) \Rightarrow (2, -1, -2)$, $|\vec{v}| = 3$; $\vec{a} = (2, 0, -2)$.
3. $a_T = \frac{\vec{v} \cdot \vec{a}}{|\vec{v}|} = \frac{4 + 0 + 4}{3} = \frac{8}{3}$.
4. $\vec{a}_T = \frac{8}{3} \cdot \frac{(2, -1, -2)}{3} = \frac{1}{9}(16, -8, -16)$.
5. $\vec{a}_N = \vec{a} - \vec{a}_T = \frac{1}{9}(18, 0, -18) - \frac{1}{9}(16, -8, -16) = \frac{1}{9}(2, 8, -2)$. Comprobación: $\vec{a}_N \cdot \vec{v} = \frac{1}{9}(4 - 8 + 4) = 0$.

Ejercicio 2A.6.2

← volver

1. $e^{2t} = e^{2\pi} \Rightarrow t_0 = \pi$. Comprobación: $\cos 2\pi = 1$.
2. $\vec{r}' = (2e^{2t}, -2 \sin 2t, 0) \Rightarrow (2e^{2\pi}, 0, 0)$; $\vec{r}'' = (4e^{2t}, -4 \cos 2t, 0) \Rightarrow (4e^{2\pi}, -4, 0)$.
3. $\vec{r}' \times \vec{r}'' = (0, 0, (2e^{2\pi})(-4) - 0) = (0, 0, -8e^{2\pi})$, con norma $8e^{2\pi}$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 100.

Ejercicio propuesto 4B.6.11

Adaptado de: 2ª final 2016-2, tipo A, problema 5.

Determine $\iint_S xy^2 dS$, donde S es la porción del cilindro $x^2 + y^2 = 4$ limitada por el primer octante y por el plano $z = 2$.

Resultado: $\frac{32}{3}$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 100.

Ejercicio propuesto 4B.6.12

Adaptado de: 3er extraordinario 2024-1, problema 5.

Calcule la circulación de $\vec{F} = (2x - 2y)\hat{i} + (y - z)\hat{j} + (x - z)\hat{k}$ alrededor de la parte del plano $x + 2y + 2z = 0$ que está dentro del cilindro $x^2 + y^2 = 1$.

Resultado: $\frac{3\pi}{2}$ (frontera antihoraria vista desde arriba).

→ Resolución en el Apéndice E, p. 100.

Ejercicio propuesto 4B.6.13

Adaptado de: 1er final 2025-1, tipo A, problema 6.

Mediante el teorema de Stokes, calcule la circulación de $\vec{F} = y^2\hat{i} + x\hat{j} + z\hat{k}$ a lo largo de la curva $x^2 + y^2 = 1$, $z = x^2 + y^2$.

Resultado: π (antihoraria vista desde arriba).

→ Resolución en el Apéndice E, p. 101.

Ejercicio propuesto 4B.6.14

Adaptado de: 2º extraordinario 2018-1, tipo A, problema 6.

Calcule la circulación total de $\vec{F} = yz^2\hat{i} + x^2z\hat{j} + xy^2\hat{k}$ a lo largo de la curva $x^2 + y^2 = 5 - z$, $z = 1$.

Resultado: -4π (antihoraria vista desde arriba).

→ Resolución en el Apéndice E, p. 101.

4B.7 Errores frecuentes

1. **Gauss en una superficie abierta:** el teorema solo vale si la superficie **encierra** un volumen. «Solo el paraboloide» no es cerrada: se calcula directo o se cierra con una tapa y se resta su flujo.
2. **Divergencia incompleta:** son siempre tres derivadas. Si una letra no aparece en su componente, ese término vale 0, pero se escribe.
3. **Derivar respecto a la letra equivocada:** P con x , Q con y , R con z . Nunca P con y .
4. **Fórmulas de volumen:** el cono lleva $\frac{1}{3}$; la esfera, $\frac{4}{3}$ y r^3 , no r^2 .
5. **Radio contra radio al cuadrado:** $x^2 + y^2 + z^2 = 25$ tiene radio 5.
6. **Divergencia en cilíndricas:** el primer término se multiplica por r antes de derivar: $\nabla \cdot (r\hat{e}_r) = 2$, no 1.

Apéndice D · Fuentes y bibliografía

Exámenes de los que se adaptaron los ejercicios:

- Exámenes extraordinarios de *Cálculo Vectorial*, semestres 2018-1, 2018-2, 2024-1, 2024-2, 2025-1, 2025-2 y 2026-1, algunos con su resolución publicada. Facultad de Ingeniería, UNAM.
- Primeros y segundos exámenes finales de *Cálculo Vectorial*, semestres 2016-1 a 2018-2 y 2024-1 a 2025-2, varios con su resolución publicada. Facultad de Ingeniería, UNAM.

Material de consulta:

- Belaunzarán García, E.; Frontana de la Cruz, B.; Gómez Saavedra, R.; González Gutiérrez, E.; Patiño Ramírez, J. A.; Rivas Gómez, S. *Apuntes de Cálculo Vectorial*. Facultad de Ingeniería, UNAM, 1981.
- González Gutiérrez, E.; Patiño Ramírez, J.; Tristán López, A. *Guía de estudio para presentar examen extraordinario de Cálculo Vectorial*. Facultad de Ingeniería, UNAM, 1986.
- Ramírez Manny, P. *Serie de Cálculo Vectorial* (problemas resueltos).
- *Serie de ejercicios de Cálculo Vectorial*: 1. Máximos y mínimos; 2. Funciones vectoriales; 3. Integrales de línea; 4. Integrales múltiples. Facultad de Ingeniería, UNAM.
- Pita Ruiz, C. *Cálculo Vectorial*. Prentice-Hall Hispanoamericana, 1995.
- Marsden, J. E.; Tromba, A. J. *Cálculo Vectorial*. Prentice-Hall Hispanoamericana, 1995.
- Programa de la asignatura *Cálculo Vectorial* (clave 0063), plan de estudios 2010. Facultad de Ingeniería, UNAM.

Apéndice A · Formulario

Geometría que se usa en los problemas aplicados:

- Cilindro: $V = \pi r^2 h$ · pared $2\pi r h$ · base y tapa $2\pi r^2$ (si está abierto, πr^2).
- Esfera: $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ · $A = 4\pi r^2$ · cono: $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$.
- Caja: $V = xyz$ · con tapa $A = 2(xy + xz + yz)$ · sin tapa $A = xy + 2xz + 2yz$.

Cálculo base (sin calculadora):

- $\int \sec^2 u \, du = \tan u$ · $\int \ln x \, dx = x \ln x - x$ · $\int r e^{ar^2} \, dr = \frac{e^{ar^2}}{2a}$ · $\int r \sqrt{1 + 4r^2} \, dr = \frac{(1 + 4r^2)^{3/2}}{12}$.
- $\int_0^{2\pi} \cos^2 \theta \, d\theta = \pi$ · $\int_0^\pi \sin \phi \, d\phi = 2$ · $\sin^2 \theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{2}$.
- $\cosh^2 t - \sinh^2 t = 1$ · $(\cosh t)' = \sinh t$ · $(\sinh t)' = \cosh t$.

Tema	Expresiones
Extremos (U1)	puntos críticos: $\nabla f = \vec{0}$ · $D = f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2$: $D > 0$, $f_{xx} > 0$ mínimo; $D > 0$, $f_{xx} < 0$ máximo; $D < 0$ silla; $D = 0$ no decide · 3 variables: $(\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3) = (+, +, +)$ mínimo, $(-, +, -)$ máximo, otro con $\Delta_3 \neq 0$ silla · Lagrange: $\nabla f = \lambda \nabla g$, $g = c$
Curvas (U2A)	$\hat{T} = \frac{\vec{r}'}{ \vec{r}' }$ · $\hat{B} = \frac{\vec{r}' \times \vec{r}''}{ \vec{r}' \times \vec{r}'' }$ · $\hat{N} = \hat{B} \times \hat{T}$ · $\kappa = \frac{ \vec{r}' \times \vec{r}'' }{ \vec{r}' ^3}$ · $\tau = \frac{(\vec{r}' \times \vec{r}'') \cdot \vec{r}'''}{ \vec{r}' \times \vec{r}'' ^2}$ · $a_T = \frac{\vec{v} \cdot \vec{a}}{ \vec{v} }$ · $a_N = \frac{ \vec{v} \times \vec{a} }{ \vec{v} }$ · $s = \int \vec{r}' \, dt$ · plano osculador $\perp \hat{B}$, normal $\perp \hat{T}$, rectificante $\perp \hat{N}$ · tangencia: $\vec{r}' \cdot \nabla F = 0$ · ángulo curva-superficie: $\sin \alpha = \frac{ \vec{r}' \cdot \vec{n} }{ \vec{r}' \vec{n} }$
Coordenadas curvilíneas (U2B)	directa $x(u, v)$: $h_u = \vec{r}_u $, $\hat{e}_u = \vec{r}_u / h_u$ · inversa $u(x, y)$: $h_u = 1/ \nabla u $, $\hat{e}_u = \nabla u / \nabla u $ · $J\left(\frac{x, y}{u, v}\right) = \frac{1}{J\left(\frac{u, v}{x, y}\right)}$ · ortogonal: $ J = h_u h_v h_w$ · $a_u = \vec{a} \cdot \hat{e}_u$ · cilíndricas $h = (1, r, 1)$ · esféricas $h = (1, \rho \sin \phi, \rho)$
Operadores (U2B)	$\nabla f = \sum \frac{1}{h_i} \frac{\partial f}{\partial q_i} \hat{e}_i$ · $\nabla \cdot \vec{F} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} [\partial_1(h_2 h_3 F_1) + \partial_2(h_1 h_3 F_2) + \partial_3(h_1 h_2 F_3)]$ · $\nabla \times \vec{F} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \begin{vmatrix} h_1 \hat{e}_1 & h_2 \hat{e}_2 & h_3 \hat{e}_3 \\ \partial_1 & \partial_2 & \partial_3 \\ h_1 F_1 & h_2 F_2 & h_3 F_3 \end{vmatrix}$ con (q_1, q_2, q_3) dextrógiro
Integrales de línea (U3)	(esféricas: (ρ, ϕ, θ)) · solenoidal: $\nabla \cdot \vec{F} = 0$ · irrotacional: $\nabla \times \vec{F} = \vec{0}$ · $\int_C f \, ds = \int f(\vec{r}(t)) \vec{r}'(t) \, dt$ · $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t) \, dt$ · segmento $\vec{r} = A + t(B - A)$, $t \in [0, 1]$ · $\nabla \times \vec{F} = (R_y - Q_z, P_z - R_x, Q_x - P_y)$ · conservativo: $W = \varphi(B) - \varphi(A)$ · curvilíneas: $d\vec{r} = \sum h_i \, dq_i \, \hat{e}_i$
Integrales dobles (U4A)	$dA = r \, dr \, d\theta$ · $dA = J\left(\frac{x, y}{u, v}\right) \, du \, dv$ · $V = \iiint (z_{techo} - z_{piso}) \, dA$ · Green: $\oint P \, dx + Q \, dy = \iint (Q_x - P_y) \, dA$ (antihorario)

Examen	Problemas
2º final 2025-2, tipo A	puntos críticos · triedro y plano normal · campo solenoidal en cilíndricas · trabajo sobre un triángulo · área entre parábolas · flujo con Gauss

Apéndice B · Qué vino en cada examen (2016–2026)

Problemas en el orden del examen. Un examen repetido se cita por su aplicación más antigua, con la nota «repetido en...».

Extraordinarios.

Examen	Problemas
1er extraordinario 2018-1, tipo A	puntos críticos · aceleraciones tangencial y normal, y curvatura · divergencia en cilíndricas · trabajo sobre una curva cerrada (hipocicloide) · teorema de Green · flujo por una esfera
2º extraordinario 2018-1, tipo A	puntos críticos · transformación ortogonal con parámetro · triedro, κ , τ y plano osculador · trabajo en cilíndricas · área entre dos curvas polares · circulación
1er extraordinario 2018-2	puntos críticos · gradiente de la divergencia · trabajo con campo conservativo en cilíndricas · volumen con integral doble · transformación no ortogonal · flujo con Gauss
1er extraordinario 2024-1	punto crítico con parámetro k · triedro y planos del triedro · transformación, regiones y jacobiano · $\int_C f \, ds$ sobre una hélice · flujo por un paraboloides
3er extraordinario 2024-1 (el mismo día se aplicó el 2º final 2024-1, tipo A, con cuatro problemas iguales)	puntos críticos en 3 variables · transformación u, v, w y gradiente · curvatura de una intersección · trabajo en polares sobre un arco · circulación (Stokes) · flujo por una esfera
1er extraordinario 2024-2 (repetido en el 1er extraordinario 2025-1)	caja inscrita en un cono · tangencia curva–superficie · campo conservativo y solenoidal · trabajo en polares · integral doble con cambio de variable · flujo por una esfera
2º extraordinario 2024-2	Lagrange · recta: longitud de arco y curvatura · divergencia y rotacional en cilíndricas · independencia de la trayectoria y función potencial · Stokes · volumen entre cono y cilindro
2º extraordinario 2025-1	puntos críticos en 3 variables · ángulo curva–superficie · transformación lineal y rotacional · trabajo sobre una elipse · área de una superficie · flujo de un campo cilíndrico
1er extraordinario 2025-2	costo mínimo · curvatura y plano osculador · vector base, factor de escala y jacobiano · trabajo en esféricas · volumen bajo un paraboloides · flujo por una esfera de radio a

Examen	Problemas
2º extraordinario 2025-2	tanque con extremos semiesféricos · a_T , a_N , κ y τ · transformación $x = u^2 - v^2$, $y = 2uv$ · divergencia en cilíndricas · trabajo contra la gravedad en una hélice · flujo con Gauss
1er extraordinario 2026-1	tanque de costo mínimo · transformación $u = x^2 - y^2$, $v = 2xy$ · $\int_C f \, ds$ sobre un segmento · constantes para campo solenoidal y conservativo · integral triple en cilíndricas · flujo por una esfera

Finales. Mismo formato.

Examen	Problemas
1er final 2016-1, tipo A	puntos críticos en 3 variables · curvatura y torsión · constante para campo conservativo y potencial en polares · trabajo en polares · integral triple · flujo con Gauss
1er final 2016-1, tipo C	caja sin tapa de costo mínimo · curvatura de una curva plana · gradiente con una transformación · trabajo en polares · área entre curvas · circulación
2º final 2016-1, tipo A	puntos críticos en 3 variables · aceleraciones tangencial y normal · laplaciano en cilíndricas · integral de línea por segmentos · área con Green · área de una porción de esfera
1er final 2016-2, tipo A	lata con Lagrange · constantes para transformación ortogonal y gradiente · trabajo · longitud de arco y aceleración normal · área de una porción de plano · flujo con Gauss
1er final 2016-2, tipo C	extremos con restricción · partícula: posición, a_T , a_N y curvatura · divergencia y rotacional en cilíndricas · integral de línea $\int_C \vec{R} \times d\vec{r}$ · circulación · flujo con Gauss
2º final 2016-2, tipo A	puntos críticos en 3 variables · ángulo entre superficies · transformación ortogonal y laplaciano · integral de línea con campo conservativo · integral de superficie · flujo de un campo cilíndrico
1er final 2017-1, tipo A	puntos críticos en 3 variables · curvatura, torsión, a_T y a_N · laplaciano en curvilíneas · trabajo · flujo con Gauss · área de un cilindro
1er final 2017-1, tipo C	caja con tapa de volumen máximo · triedro móvil · laplaciano en cilíndricas · función potencial · área con integral doble · flujo con Gauss
2º final 2017-1, tipo A	distancia mínima y máxima con Lagrange · curvatura de una intersección · integral de línea cerrada · transformación ortogonal · trabajo con Stokes · flujo con Gauss