5. Comprobación opcional: cierra la superficie con una tapa plana, aplica Gauss y resta el flujo de la tapa.

4B.3.4 Integral triple en cilíndricas o esféricas

1. **Dibuja** el sólido: piso, techo y sombra.
2. Elige coordenadas: cilíndricas si hay $x^2 + y^2$ (cilindro, cono, paraboloide); esféricas si hay $x^2 + y^2 + z^2$ (esfera).
3. Traduce el integrando ($\sqrt{x^2 + y^2} = r$) y escribe dV **con su jacobiano**.
4. Límites: z de piso a techo; r del centro al radio de la sombra; θ según la región. Los de adentro pueden tener letras; el de afuera, solo números.
5. Integra de adentro hacia afuera.

4B.3.5 Flujo con el teorema de Gauss (divergencia constante)

1. Comprueba que la superficie es **cerrada** y escríbelo: «S es cerrada; por el teorema de Gauss…».
2. Escribe P, Q y R en renglones separados.
3. Deriva P solo respecto a x, Q solo respecto a y y R solo respecto a z. Si una letra no aparece, ese término vale 0. Suma.
4. Si la divergencia es un número c: obtén las medidas del sólido (el radio de $x^2+y^2+z^2 = 25$ es 5) y su volumen con la tabla de 4B.1.
5. Flujo $= c \cdot V$. Déjalo exacto, con π.

4B.3.6 Gauss con divergencia variable

1. Calcula la divergencia; suele quedar algo como $3y + 2z$, x^2, $2z$ o $x^2 + y^2$.
2. **Simetría:** quita los términos x, y (y z, en una esfera centrada) cuyo integral vale cero por simetría.
3. Si queda una constante, multiplícala por el volumen.
4. Si queda un término como x^2, $x^2 + y^2$ o z, integra en cilíndricas o esféricas (4B.3.4).
5. Si el volumen no es de tabla, calcúlalo con una integral doble: $V = \iint_R (z_{techo} - z_{piso})\, dA$.

4B.3.7 ¿Entra o sale fluido? (divergencia en cilíndricas)

1. Identifica F_r, F_θ y F_z.
2. Término 1: multiplica F_r por r, deriva respecto a r y divide entre r.
3. Término 2: deriva F_θ respecto a θ y divide entre r.
4. Término 3: deriva F_z respecto a z.
5. Suma y evalúa en el punto. **Negativa: entra más del que sale.** Positiva: sale más. Cero: igual.
6. Atajo: $r\,\hat{e}_r + z\,\hat{e}_z$ es el campo $x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} + z\hat{k}$, con divergencia 3.

4B.3.8 Campo radial unitario sobre una esfera

1. $\vec{F} = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$ tiene divergencia $\frac{2}{\rho}$, que no es constante y no está definida en el origen. **No conviene Gauss.**
2. En la esfera de radio a: $\hat{n} = \frac{\vec{r}}{a}$ y $|\vec{r}| = a$, así que $\vec{F} \cdot \hat{n} = \frac{\vec{r}\cdot\vec{r}}{a \cdot a} = 1$.
3. Flujo $= 1 \cdot$ Área $= 4\pi a^2$.

3. Si piden que sea solenoidal, agrega $P_x + Q_y + R_z = 0$.
4. Resuelve el sistema, sustituye las constantes en $\vec{F}$ y, si lo piden, obtén φ con 3.3.4.

3.3.6 Trabajo en coordenadas polares, cilíndricas o esféricas

1. Escribe los factores de escala: polares y cilíndricas $(1, r, 1)$; esféricas $(1, \rho\,\mathrm{sen}\,\phi, \rho)$.
2. Forma la diferencial $\vec{F}\cdot d\vec{r} = h_1F_1\,dq_1 + h_2F_2\,dq_2 + h_3F_3\,dq_3$. En cilíndricas, la componente F_θ **se multiplica por** r.
3. Busca φ con $\dfrac{\partial \varphi}{\partial q_i} = h_iF_i$, con el método de 3.3.4.
4. Si existe, $W = \varphi(B) - \varphi(A)$ con A y B en las mismas coordenadas del campo. No hace falta pasar a cartesianas ni parametrizar la recta.
5. Si no existe y el camino es un arco de circunferencia $r =$ constante, entonces $dr = 0$ y solo queda $\displaystyle\int F_\theta\, r\, d\theta$.
6. Si los puntos vienen en cartesianas y el campo en polares, convierte los puntos: $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ y θ según el cuadrante.

3.3.7 Curva cerrada

1. Calcula el rotacional.
2. Si $\nabla \times \vec{F} = \vec{0}$ y el campo está definido en todo $\mathbb{R}^3$ (o en una región simplemente conexa que contenga la curva), entonces $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$. No parametrices la curva.
3. Si no es cero, parametriza (3.3.2) o, en el plano, aplica el teorema de Green (Unidad 4, parte A).

3.4 Ejemplo resuelto

Adaptado de: 1er final 2025-2, tipo A, problema 4.

Determine el trabajo realizado por el campo de fuerzas $\vec{F}(x, y, z) = (8xy^3z)\,\hat{\imath} + (12x^2y^2z)\,\hat{\jmath} + (4x^2y^3)\,\hat{k}$ cuando la partícula se desplaza a lo largo de la hélice $\vec{r}(t) = (2\cos t)\,\hat{\imath} + (2\,\mathrm{sen}\,t)\,\hat{\jmath} + t\,\hat{k}$, desde el punto $A(2, 0, 0)$ hasta el punto $B\left(1, \sqrt{3}, \frac{\pi}{3}\right)$.

Datos: $P = 8xy^3z$, $Q = 12x^2y^2z$, $R = 4x^2y^3$; $A(2, 0, 0)$, $B\left(1, \sqrt{3}, \frac{\pi}{3}\right)$.

Planteamiento. Antes de parametrizar la hélice se revisa si el campo es conservativo: $W = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ y, si $\nabla \times \vec{F} = \vec{0}$, $W = \varphi(B) - \varphi(A)$.

Resolución.

1. Derivadas: $P_y = 24xy^2z$, $P_z = 8xy^3$; $Q_x = 24xy^2z$, $Q_z = 12x^2y^2$; $R_x = 8xy^3$, $R_y = 12x^2y^2$.
2. Rotacional: $R_y - Q_z = 0$, $-(R_x - P_z) = 0$, $Q_x - P_y = 0$. El campo es **conservativo** y la forma de la hélice ya no importa.
3. $\varphi = \int 8xy^3z\,dx = 4x^2y^3z + g(y, z)$.
4. $\varphi_y = 12x^2y^2z + g_y = Q = 12x^2y^2z \Rightarrow g_y = 0$, así que $g = h(z)$.
5. $\varphi_z = 4x^2y^3 + h'(z) = R = 4x^2y^3 \Rightarrow h'(z) = 0$. Entonces $\varphi = 4x^2y^3z$.
6. $\varphi(B) = 4 \cdot 1 \cdot (\sqrt{3})^3 \cdot \dfrac{\pi}{3} = 4 \cdot 3\sqrt{3} \cdot \dfrac{\pi}{3} = 4\sqrt{3}\,\pi$ y $\varphi(A) = 0$, porque $y = 0$.

Resultado: $W = \varphi(B) - \varphi(A) = 4\sqrt{3}\,\pi$ unidades de trabajo.

- $\nabla \cdot \vec{F} < 0$: es un **sumidero**, entra más del que sale.
- $\nabla \cdot \vec{F} = 0$ en todo el dominio: el campo es **solenoidal**.

Teorema de Gauss (de la divergencia). Si S es una superficie **cerrada** que encierra el sólido V y $\hat{n}$ es la normal exterior:

$$\oiint_S \vec{F} \cdot \hat{n}\, dS = \iiint_V \nabla \cdot \vec{F}\, dV$$

Si la divergencia es una constante c, el flujo es c por el volumen del sólido y **no hay que integrar**.

Rotacional y teorema de Stokes.

$$\nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \big(R_y - Q_z,\ P_z - R_x,\ Q_x - P_y\big)$$

Si C es la frontera de una superficie S:

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_S (\nabla \times \vec{F}) \cdot \hat{n}\, dS$$

- La integral de la izquierda es la **circulación** (o el trabajo en una curva cerrada).
- Sirve **cualquier** superficie con frontera C; se elige la más sencilla, casi siempre el pedazo de plano que encierra la curva.
- **Orientación (regla de la mano derecha):** C antihoraria vista desde arriba corresponde a la normal hacia arriba. Si C va en sentido horario, el signo cambia.
- El teorema de Green es el caso en que S está en el plano XY.

Simetría. Si el sólido o la superficie es simétrico respecto al plano $x = 0$ (por ejemplo, una esfera, un cilindro o un cono centrados en el eje Z), entonces $\iiint_V x\, dV = 0$; igual con y. Una esfera centrada en el origen también da $\iiint_V z\, dV = 0$.

Volúmenes que se usan.

Sólido	Volumen
Esfera de radio a	$\frac{4}{3}\pi a^3$
Semiesfera	$\frac{2}{3}\pi a^3$
Cilindro	$\pi r^2 h$
Cono	$\frac{1}{3}\pi r^2 h$
Paraboloide $z = h - x^2 - y^2$ sobre $z = 0$	$\frac{1}{2}\pi h^2$
Caja	$a\,b\,c$
Área de la esfera	$4\pi a^2$

4B.2 Cómo reconocer el problema

5. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} 3\, dt = \frac{3\pi}{2}$.

Resultado: $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \frac{3\pi}{2}$.

Ejercicio 3.5.4 · Trabajo contra la gravedad

Adaptado de: 2º extraordinario 2025-2, problema 5.

Una ardilla que pesa 1.2 lb sube a un árbol cilíndrico siguiendo la trayectoria helicoidal $x = \cos t$, $y = \operatorname{sen} t$, $z = 4t$, con $0 \le t \le 8\pi$ y distancias en pies. ¿Cuánto trabajo realiza?

Datos: $w = 1.2$ [lb] $= \frac{6}{5}$ [lb]; $0 \le t \le 8\pi$; distancias en [ft].

Planteamiento. Para subir, la ardilla aplica una fuerza igual a su peso hacia arriba: $\vec{F} = (0,\ 0,\ \frac{6}{5})$. Es un campo constante, conservativo, con $\varphi = \frac{6}{5}z$.

Resolución.

1. Con la parametrización: $\vec{r}\,' = (-\operatorname{sen} t,\ \cos t,\ 4)$ y $\vec{F} \cdot \vec{r}\,' = \frac{6}{5} \cdot 4 = \frac{24}{5}$.
2. $W = \displaystyle\int_0^{8\pi} \frac{24}{5}\, dt = \frac{24}{5} \cdot 8\pi = \frac{192\pi}{5}$.
3. Con la función potencial: $\Delta z = 4(8\pi) - 0 = 32\pi$ y $W = \frac{6}{5} \cdot 32\pi = \frac{192\pi}{5}$. Las vueltas alrededor del tronco no cuentan.

Resultado: $W = \frac{192\pi}{5}$ **lb·ft** ≈ 120.6 lb·ft.

Ejercicio 3.5.5 · Independencia de la trayectoria

Adaptado de: 2º extraordinario 2024-2, problema 4.

Sea la integral de línea $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$, donde $\vec{F}(x, y, z) = e^{2z}\,\hat{\imath} + 3y^2\,\hat{\jmath} + 2xe^{2z}\,\hat{k}$ y C es una curva que une los puntos $A(1, 1, \ln 3)$ y $B(2, 2, \ln 3)$.

- a) Demuestre que la integral es independiente de la trayectoria.
- b) Obtenga una función potencial de $\vec{F}$.
- c) Calcule el valor de la integral.

Resolución.

1. a) $R_y - Q_z = 0 - 0 = 0$; $-(R_x - P_z) = -(2e^{2z} - 2e^{2z}) = 0$; $Q_x - P_y = 0 - 0 = 0$. Como $\nabla \times \vec{F} = \vec{0}$ en todo $\mathbb{R}^3$, la integral es **independiente de la trayectoria**.
2. b) $\varphi = \int e^{2z}\, dx = xe^{2z} + g(y, z)$.
3. $\varphi_y = g_y = 3y^2 \Rightarrow g = y^3 + h(z)$.
4. $\varphi_z = 2xe^{2z} + h'(z) = 2xe^{2z} \Rightarrow h' = 0$. Entonces $\varphi = xe^{2z} + y^3$.
5. c) $e^{2\ln 3} = \left(e^{\ln 3}\right)^2 = 9$. $\varphi(B) = 2 \cdot 9 + 8 = 26$ y $\varphi(A) = 9 + 1 = 10$.

Resultado: $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = 26 - 10 =$ **16**.

Ejercicio 3.5.6 · Campo conservativo con senos y cosenos

Adaptado de: 1er final 2024-1, tipo A, problema 4.

Calcule el trabajo que efectúa el campo de fuerzas $\vec{F}(x, y, z) = -(2y^2 \cos z)\,\hat{\imath} - (4xy \cos z)\,\hat{\jmath} + (2xy^2 \operatorname{sen} z)\,\hat{k}$ al desplazar una partícula del punto $A\left(\sqrt{2}, 1, \frac{\pi}{4}\right)$ al punto $B\left(\sqrt{2}, 2, \frac{3\pi}{4}\right)$ a lo largo de la recta que los une.

Unidad 4 · Parte B · Integrales múltiples: integrales de superficie, integrales triples y teoremas de Stokes y Gauss

Objetivo (programa de la asignatura). El alumno calculará integrales múltiples y las aplicará en la resolución de problemas físicos y geométricos, así como utilizará los teoremas de Gauss y Stokes para calcular integrales de superficie.

Instrucciones de emergencia

- **Frecuencia:** aparece en 33 de los 35 exámenes revisados, de 2016 a 2026, y en los 11 extraordinarios. El **flujo** sale en 9 de los 11 extraordinarios y el teorema de Stokes, en 3. Suele ser el problema 6 (a veces también el 5) y vale de 15 a 20 puntos.
- **Tiempo:** de 4 a 5 horas para esta unidad. El flujo con el teorema de Gauss, solo, se aprende en 2.
- **Ruta corta:**
  1. Lee la sección 4B.1 y el procedimiento 4B.3.5 (25 min).
  2. Sigue el ejemplo 4B.4 tapando la resolución.
  3. Resuelve los ejercicios de flujo 4B.5.7 a 4B.5.14 con cronómetro (15 min cada uno).
  4. Después, Stokes (4B.5.5 y 4B.5.6) y, si queda tiempo, las integrales de superficie (4B.5.1 a 4B.5.3).

4B.1 Conceptos y expresiones

Superficies. Una superficie se da de dos maneras:

- **Explícita:** $z = g(x, y)$ sobre una región R del plano XY (su sombra).
- **Paramétrica:** $\vec{r}(u, v) = \big(x(u, v),\ y(u, v),\ z(u, v)\big)$ con (u, v) en una región D.

Vector normal y elemento de superficie.

$$\vec{N} = \vec{r}_u \times \vec{r}_v, \qquad dS = \left|\vec{r}_u \times \vec{r}_v\right| du\, dv$$

Para $z = g(x, y)$, con $\vec{r}(x, y) = (x,\ y,\ g)$:

$$\vec{N} = (-g_x,\ -g_y,\ 1) \ \text{(apunta hacia arriba)}, \qquad dS = \sqrt{1 + g_x^2 + g_y^2}\, dA$$

Superficies frecuentes.

Superficie	Parametrización	dS	Normal unitaria exterior
Esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$	$(a \operatorname{sen}\phi \cos\theta,\ a \operatorname{sen}\phi \operatorname{sen}\theta,\ a\cos\phi)$	$a^2 \operatorname{sen}\phi\, d\phi\, d\theta$	$\hat{n} = \frac{\vec{r}}{a}$
Cilindro $x^2 + y^2 = a^2$	$(a\cos\theta,\ a \operatorname{sen}\theta,\ z)$	$a\, d\theta\, dz$	$\hat{n} = (\cos\theta,\ \operatorname{sen}\theta,\ 0)$

Resultado: $W = 0 - (-2) = \mathbf{2}$ unidades de trabajo.

Los puntos vienen en cartesianas y el campo en polares. Pasar φ a cartesianas evita calcular ángulos en el tercer y cuarto cuadrantes.

Ejercicio 3.5.9 · Trabajo en coordenadas esféricas

Adaptado de: 1er extraordinario 2025-2, problema 4.

Obtenga el trabajo que realiza el campo de fuerzas, definido en coordenadas esféricas por

$$\vec{F}(\rho, \theta, \phi) = \phi \operatorname{sen}\theta\, \hat{e}_\rho + \frac{\phi\cos\theta}{\operatorname{sen}\phi}\, \hat{e}_\theta + \operatorname{sen}\theta\, \hat{e}_\phi,$$

sobre una partícula que se desplaza del punto $A\left(1, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}\right)$ al punto $B\left(3, \pi, \frac{\pi}{2}\right)$, dados también en coordenadas esféricas.

Planteamiento. Factores de escala $h_\rho = 1$, $h_\theta = \rho \operatorname{sen}\phi$, $h_\phi = \rho$. Como la letra ϕ ya es un ángulo, la función potencial se llama aquí f.

Resolución.

1. $\vec{F}\cdot d\vec{r} = \phi \operatorname{sen}\theta\, d\rho + \frac{\phi\cos\theta}{\operatorname{sen}\phi}\, \rho \operatorname{sen}\phi\, d\theta + \operatorname{sen}\theta\, \rho\, d\phi = \phi \operatorname{sen}\theta\, d\rho + \rho\,\phi\cos\theta\, d\theta + \rho \operatorname{sen}\theta\, d\phi$. El $\operatorname{sen}\phi$ se cancela.
2. $f = \int \phi \operatorname{sen}\theta\, d\rho = \rho\,\phi \operatorname{sen}\theta + g(\theta, \phi)$.
3. $f_\theta = \rho\,\phi\cos\theta + g_\theta = \rho\,\phi\cos\theta \Rightarrow g_\theta = 0$; $f_\phi = \rho \operatorname{sen}\theta + g_\phi = \rho \operatorname{sen}\theta \Rightarrow g_\phi = 0$. Entonces $f = \rho\,\phi \operatorname{sen}\theta$: la diferencial es exacta.
4. $f(B) = 3 \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \operatorname{sen}\pi = 0$ y $f(A) = 1 \cdot \frac{\pi}{4} \cdot \operatorname{sen}\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}$.

Resultado: $W = 0 - \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{4}$ unidades de trabajo.

3.6 Ejercicios propuestos

Resuélvelos sin ver la solución. Las resoluciones completas están en el **Apéndice E, sección E.3**.

Ejercicio propuesto 3.6.1

Adaptado de: 1er extraordinario 2018-1, tipo A, problema 4.

Calcule el trabajo que realiza el campo de fuerzas $\vec{F}(x, y, z) = (\cos y - y^2 \operatorname{sen} x - z^2)\,\hat{\imath} + (-x \operatorname{sen} y + 2y\cos x - 2)\,\hat{\jmath} + (1 - 2xz)\,\hat{k}$ cuando una partícula recorre una sola vez la trayectoria cerrada $x^{2/3} + y^{2/3} = 3^{2/3}$ (hipocicloide de cuatro puntas).

Resultado: $W = 0$, porque $\nabla \times \vec{F} = \vec{0}$ en todo $\mathbb{R}^3$ y la curva es cerrada.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 95.

Ejercicio propuesto 3.6.2

Adaptado de: 2º extraordinario 2018-1, tipo A, problema 4.

Sea el campo de fuerzas $\vec{F}(r, \theta, z) = (rz^2 \operatorname{sen}^2\theta)\,\hat{e}_r + (rz^2 \operatorname{sen}\theta\cos\theta)\,\hat{e}_\theta + (r^2 z \operatorname{sen}^2\theta)\,\hat{e}_z$. Calcule el trabajo que efectúa en el movimiento de una partícula del punto $A\left(1, \frac{\pi}{4}, 2\right)$ al punto $B(2, 0, -1)$ a lo largo de la recta que los une. El campo y los puntos están en coordenadas cilíndricas circulares.

Ejercicio propuesto 4A.6.7

Adaptado de: 1er final 2018-2, tipo C, problema 6.

Empleando el teorema de Green, calcule $\oint_C (y-x)\,dx + (2x-y)\,dy$, donde C es la frontera de la región delimitada por $y = x$ y $y = x^2 - x$.

Resultado: $\frac{4}{3}$ (sentido positivo).

→ Resolución en el Apéndice E, p. 98.

Ejercicio propuesto 4A.6.8

Adaptado de: Guía de estudio para presentar examen extraordinario de Cálculo Vectorial, 1986, ejemplo V.a.3.

Calcule $\iint_R \left(x^2 + y^2\right) dA$, donde R es la región limitada por $x + y = 0$, $x + y = 2$, $x - y = 0$ y $x - y = 2$. Use $u = x + y$, $v = x - y$.

Resultado: $\frac{8}{3}$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 98.

4A.7 Errores frecuentes

1. **Olvidar el jacobiano:** en polares $dA = r\,dr\,d\theta$. Sin la r, el ejemplo 4A.4 da $\frac{4\pi}{3}$ en lugar de π.
2. **Radio contra radio al cuadrado:** $x^2 + y^2 = 9$ es una circunferencia de radio 3, no de radio 9; $x^2 + y^2 = 2$ tiene radio $\sqrt{2}$.
3. **Letras en los límites de afuera:** la integral exterior lleva solo números.
4. **Jacobiano del cambio de variable:** el que va en la integral es $J\left(\frac{x,y}{u,v}\right)$, el **recíproco** del que se calcula con $u(x,y)$, $v(x,y)$, y siempre en **valor absoluto**.
5. **Orden de integración:** si una primitiva no existe ($\int e^{x^2} dx$), cambia el orden y recalcula los límites desde el dibujo.
6. **Cono de dos hojas:** $z^2 = x^2 + y^2$ es $z = \pm r$; la altura es $2r$.
7. **Límites de θ contra la región:** si la región es solo $y \geq 0$, θ va de 0 a π, no de 0 a 2π.
8. **Green al revés:** el integrando es $Q_x - P_y$, en ese orden. P acompaña a dx y Q a dy.
9. **Sentido de la curva:** Green da la integral en sentido antihorario; en sentido horario se cambia el signo.
10. **Integrales de vuelta completa:** $\int_0^{2\pi} \cos\theta\,d\theta = 0$, pero $\int_0^{\pi/2} \cos\theta\,d\theta = 1$.

4A.8 Formulario de emergencia de la unidad

- Área: $A = \iint_R dA$ · volumen: $V = \iint_R (z_{techo} - z_{piso})\,dA$.
- Polares: $x^2 + y^2 = r^2$, $dA = r\,dr\,d\theta$.
- Cambio de variable: $dA = \left|J\left(\frac{x,y}{u,v}\right)\right| du\,dv$, con $J\left(\frac{x,y}{u,v}\right) = 1 \Big/ J\left(\frac{u,v}{x,y}\right)$.
- Green: $\oint_C P\,dx + Q\,dy = \iint_R (Q_x - P_y)\,dA$, C antihoraria.
- Área con Green: $A = \frac{1}{2}\oint_C x\,dy - y\,dx$.
- $\int r^n dr = \frac{r^{n+1}}{n+1}$ · $\int r\,e^{ar^2} dr = \frac{e^{ar^2}}{2a}$ · $\operatorname{sen}^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2}$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 96.

Ejercicio propuesto 3.6.8

Adaptado de: 1er extraordinario 2024-2, problema 3 (repetido en el 1er extraordinario 2025-1).

Determine si el campo vectorial

$$\vec{F}(x,y,z) = \left(\ln x + \sec^2(x+y)\right)\hat{\imath} + \left(\sec^2(x+y) + \frac{y}{y^2+z^2}\right)\hat{\jmath} + \frac{z}{y^2+z^2}\,\hat{k}$$

es conservativo y solenoidal.

Resultado: es **conservativo**, con $\varphi = x\ln x - x + \tan(x+y) + \frac{1}{2}\ln(y^2+z^2)$, y **no es solenoidal**: $\nabla\cdot\vec{F} = \frac{1}{x} + 4\sec^2(x+y)\tan(x+y)$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 96.

Ejercicio propuesto 3.6.9

Adaptado de: 1er extraordinario 2018-2, problema 3.

Sea el campo $\vec{F}(r,\theta,z) = -\frac{z}{r^2}\sec^2\theta\,\hat{e}_r + \frac{2z}{r^2}\sec^2\theta\tan\theta\,\hat{e}_\theta + \left(\frac{1}{r} + \frac{\tan^2\theta}{r}\right)\hat{e}_z$, en coordenadas cilíndricas. Compruebe que es conservativo y calcule el trabajo que realiza al mover una partícula del punto $A\left(1, \frac{\pi}{4}, 1\right)$ al punto $B(2,0,2)$.

Resultado: $\varphi = \frac{z}{r}\sec^2\theta$ y $W = -1$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 97.

3.7 Errores frecuentes

1. **Signo de la componente $\hat{\jmath}$ del rotacional:** lleva un menos delante, $-(R_x - P_z)$, o bien $P_z - R_x$. Escribe el determinante y el patrón $+\ -\ +$.
2. **$|\vec{r}\,'|$ en el lugar equivocado:** va en $\int_C f\,ds$ y **no** va en $\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r}$.
3. **Límites de t:** se encuentran sustituyendo A y B en $\vec{r}(t)$. Recorrer la curva de B a A cambia el signo del trabajo.
4. **Derivadas de seno y coseno:** $(\cos z)' = -\operatorname{sen} z$; con un menos delante, $(-\cos z)' = +\operatorname{sen} z$. $\int \operatorname{sen} u\,du = -\cos u$. En el segundo cuadrante el coseno es negativo: $\cos\frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.
5. **Orden de la resta:** $W = \varphi(\text{final}) - \varphi(\text{inicial})$, nunca al revés.
6. **Términos repetidos en φ:** si $2xy$ ya salió al integrar P, no se vuelve a sumar al integrar Q. Por eso se integra una sola vez y luego se deriva y se compara.
7. **Factores de escala:** en polares y cilíndricas F_θ se multiplica por r; en esféricas, F_θ por $\rho\operatorname{sen}\phi$ y F_ϕ por ρ. Sin ellos la potencial no cuadra.
8. **Curva cerrada con rotacional nulo:** el trabajo es cero solo si el campo está definido en una región simplemente conexa que contenga la curva. Un campo como $\frac{-y\,\hat{\imath} + x\,\hat{\jmath}}{x^2+y^2}$ tiene rotacional nulo y circulación 2π alrededor del origen.
9. **«Recta» en cilíndricas o polares:** no significa que r, θ y z varíen linealmente. Con función potencial no importa: solo se usan A y B.

Resolución.

1. $P = 4 + e^{\sqrt{x}}$, de donde $P_y = 0$. $Q = \operatorname{sen} y + 3x^2$, de donde $Q_x = 6x$.
2. Región: $4 \le r \le 9$, $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$. Se toma C en sentido positivo.
3. $\displaystyle\iint_R 6x\,dA = \int_0^{\pi/2}\int_4^9 6r\cos\theta \cdot r\,dr\,d\theta.$
4. En r: $\displaystyle\int_4^9 6r^2\,dr = 2\left(9^3 - 4^3\right) = 2(729 - 64) = 1330.$
5. En θ: $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos\theta\,d\theta = 1.$

Resultado: 1330.

Ejercicio 4A.5.8 · Green sobre un triángulo

Adaptado de: 1er final 2017-2, tipo A, problema 5.

Mediante el teorema de Green, evalúe $\displaystyle\oint_C xy^2\,dx + 2x^2y\,dy$, donde C es el triángulo de vértices $A(0,0)$, $B(2,2)$ y $D(2,4)$, con orientación positiva.

Resolución.

1. $P = xy^2 \Rightarrow P_y = 2xy$; $Q = 2x^2y \Rightarrow Q_x = 4xy$. Entonces $Q_x - P_y = 2xy$.
2. Región: los lados AB y AD están sobre $y = x$ y $y = 2x$; el lado BD sobre $x = 2$. Así, $0 \le x \le 2$, $x \le y \le 2x$.
3. $\displaystyle\int_0^2\int_x^{2x} 2xy\,dy\,dx = \int_0^2 x\left[y^2\right]_x^{2x} dx = \int_0^2 x\,(4x^2 - x^2)\,dx = \int_0^2 3x^3\,dx.$
4. $= \frac{3}{4}x^4\Big|_0^2 = \frac{3}{4}\cdot 16 = 12.$

Resultado: 12.

Ejercicio 4A.5.9 · Área de una elipse con Green

Adaptado de: 2º final 2016-1, tipo A, problema 5.

Por medio del teorema de Green, calcule el área de la región limitada por la elipse $4x^2 + 9y^2 = 36$.

Resolución.

1. Forma canónica: $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$; semiejes 3 y 2.
2. Parametrización antihoraria: $x = 3\cos t$, $y = 2\operatorname{sen} t$, $0 \le t \le 2\pi$. Entonces $dx = -3\operatorname{sen} t\,dt$ y $dy = 2\cos t\,dt$.
3. $x\,dy - y\,dx = \left(6\cos^2 t + 6\operatorname{sen}^2 t\right)dt = 6\,dt.$
4. $A = \frac{1}{2}\displaystyle\int_0^{2\pi} 6\,dt = \frac{1}{2}\cdot 12\pi.$

Resultado: $A = 6\pi$ u², que coincide con $\pi ab = \pi\cdot 3\cdot 2$.

4A.6 Ejercicios propuestos

Resuélvelos sin ver la solución. Las resoluciones completas están en el **Apéndice E, sección E.4A**.

Unidad 4 · Parte A · Integrales múltiples: integrales dobles, áreas, volúmenes, cambio de variable y teorema de Green

Objetivo (programa de la asignatura). El alumno calculará integrales múltiples y las aplicará en la resolución de problemas físicos y geométricos, así como utilizará los teoremas de Gauss y Stokes para calcular integrales de superficie.

Instrucciones de emergencia

- **Frecuencia:** aparece en 19 de los 35 exámenes revisados, de 2016 a 2026 (en 5 de los 11 extraordinarios). Suele ser el problema 5 y vale de 15 a 20 puntos.
- **Tiempo:** de 2 a 3 horas para esta unidad.
- **Ruta corta:**
  1. Lee la sección 4A.1 (20 min).
  2. Sigue el ejemplo 4A.4 tapando la resolución.
  3. Resuelve los ejercicios 4A.5 con cronómetro (15 min cada uno). Empieza por 4A.5.3, 4A.5.5 y 4A.5.7.

4A.1 Conceptos y expresiones

Integral doble. Sea f continua en una región acotada R del plano XY. Se divide R en rectángulos pequeños de área ΔA y se suma $f\,\Delta A$ en cada uno; el límite de esas sumas es la integral doble

$$\iint_R f(x,y)\,dA$$

Toda función continua en una región cerrada y acotada es integrable.

Interpretación geométrica.

- Con $f = 1$, la integral es el **área** de la región: $A = \iint_R dA$.
- Si $f \ge 0$, es el **volumen** del sólido que está debajo de la superficie $z = f(x,y)$ y arriba de R.
- El volumen entre dos superficies, un **techo** $z = z_2(x,y)$ y un **piso** $z = z_1(x,y)$, sobre la sombra R del sólido en el plano XY, es

$$V = \iint_R \left(z_2 - z_1\right)dA$$

Integral reiterada. La integral doble se calcula como dos integrales sencillas, de adentro hacia afuera.

- Región de tipo I: $a \le x \le b$, $g_1(x) \le y \le g_2(x)$. Entonces $\displaystyle\iint_R f\,dA = \int_a^b\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f\,dy\,dx.$
- Región de tipo II: $c \le y \le d$, $h_1(y) \le x \le h_2(y)$. Entonces $\displaystyle\iint_R f\,dA = \int_c^d\int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f\,dx\,dy.$
- Los límites de la integral interior pueden tener la otra variable; los de la exterior, **solo números**.

Ejercicio 4A.5.2 · Volumen con cambio de orden de integración

Adaptado de: 1er final 2025-2, tipo A, problema 5.

Determine el volumen del sólido bajo la superficie $z = y\,e^{x^2}$ y sobre la región R del primer cuadrante acotada por $x = y^2$, $x = 4$ y $y = 0$.

Resolución.

1. La región: $0 \le y \le 2$, $y^2 \le x \le 4$, o bien $0 \le x \le 4$, $0 \le y \le \sqrt{x}$.
2. Si se integra primero en x aparece $\int e^{x^2}dx$, que no tiene primitiva elemental. Se integra **primero en** y.
3. $V = \displaystyle\int_0^4\int_0^{\sqrt{x}} y\,e^{x^2}\,dy\,dx$. En y, e^{x^2} es constante: $\displaystyle\int_0^{\sqrt{x}} y\,dy = \frac{x}{2}$.
4. $V = \displaystyle\int_0^4 \frac{x}{2}\,e^{x^2}\,dx$. Con $w = x^2$, $dw = 2x\,dx$: $V = \frac{1}{4}\left[e^{x^2}\right]_0^4 = \frac{1}{4}\left(e^{16} - 1\right)$.

Resultado: $V = \frac{e^{16}-1}{4}$ u³.

Ejercicio 4A.5.3 · Integral sobre un anillo

Adaptado de: 1er final 2024-1, tipo A, problema 5.

Calcule $\displaystyle\iint_R 4e^{2(x^2+y^2)}\,dA$, donde R es la región limitada por las circunferencias $x^2 + y^2 = 4$ y $x^2 + y^2 = 9$.

Resolución.

1. Anillo: $2 \le r \le 3$, $0 \le \theta \le 2\pi$. El integrando es $4e^{2r^2}$ y $dA = r\,dr\,d\theta$.
2. $\displaystyle\int_0^{2\pi}\int_2^3 4r\,e^{2r^2}\,dr\,d\theta$.
3. En r: con $w = 2r^2$, $dw = 4r\,dr$, así que $\displaystyle\int_2^3 4r\,e^{2r^2}dr = \left[e^{2r^2}\right]_2^3 = e^{18} - e^8$.
4. En θ: el resultado no depende de θ; se multiplica por 2π.

Resultado: $2\pi\left(e^{18} - e^8\right)$.

Ejercicio 4A.5.4 · Área de un pétalo

Adaptado de: 1er final 2025-1, tipo A, problema 5.

Utilice integrales dobles para calcular el área de la región delimitada por uno de los pétalos de la rosa $r = 2\operatorname{sen} 3\theta$.

Resolución.

1. Un pétalo va entre dos ceros consecutivos de $\operatorname{sen} 3\theta$: $0 \le \theta \le \frac{\pi}{3}$, con $0 \le r \le 2\operatorname{sen} 3\theta$.
2. $A = \displaystyle\int_0^{\pi/3}\int_0^{2\operatorname{sen} 3\theta} r\,dr\,d\theta = \int_0^{\pi/3} 2\operatorname{sen}^2 3\theta\,d\theta$.
3. Con $\operatorname{sen}^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2}$: $A = \displaystyle\int_0^{\pi/3}(1 - \cos 6\theta)\,d\theta = \frac{\pi}{3} - \frac{\operatorname{sen} 6\theta}{6}\Big|_0^{\pi/3} = \frac{\pi}{3} - 0$.

Resultado: $A = \frac{\pi}{3}$ u².

Área con el teorema de Green. Con $P = -\frac{y}{2}$ y $Q = \frac{x}{2}$, el integrando vale 1:

$$A = \frac{1}{2}\oint_C x\,dy - y\,dx$$

Geometría que se usa.

Figura	Área o volumen
Disco de radio a	πa^2
Elipse de semiejes a, b	πab
Triángulo	$\frac{1}{2}$ base × altura
Cilindro	$\pi r^2 h$
Cono	$\frac{1}{3}\pi r^2 h$
Esfera	$\frac{4}{3}\pi r^3$

4A.2 Cómo reconocer el problema

Si el enunciado dice…	Se trata de…	Procedimiento
«calcular el área de la región limitada por las curvas…», «mediante una integral doble»	área con integral doble	4A.3.1
«volumen del sólido bajo la superficie $z = \ldots$ y sobre la región R»	volumen con integral doble	4A.3.2
«volumen de la región limitada por las superficies…» (cono, paraboloide, cilindro)	volumen entre techo y piso	4A.3.2
$x^2 + y^2$ en el integrando o en las fronteras; circunferencias, anillos, sectores	polares	4A.3.3
«uno de los pétalos de la rosa $r = \ldots$», curvas dadas en polares	área en polares	4A.3.3
«Sugerencia: use $u = \ldots$, $v = \ldots$», fronteras rectas inclinadas $x \pm y = c$	cambio de variable	4A.3.4
$\oint_C P\,dx + Q\,dy$ sobre una curva **cerrada plana**, «mediante el teorema de Green»	teorema de Green	4A.3.5
«por medio del teorema de Green, calcular el área…»	área con Green	4A.3.6

4A.3 Procedimientos

4A.3.1 Área de una región con integral doble

1. **Dibuja** las curvas y sombrea la región.
2. Calcula los **puntos de intersección** igualando las ecuaciones.
3. Elige el orden: si la región tiene un «techo» y un «piso» como funciones de x, integra primero en y; si tiene «derecha» e «izquierda» como funciones de y, primero en x.

La hélice está en el enunciado para tentar a parametrizar. Con el rotacional nulo, el trabajo solo depende de los extremos. El mismo valor se obtiene integrando sobre la hélice de $t = 0$ a $t = \frac{\pi}{3}$.

3.5 Ejercicios de examen (resueltos)

Ejercicio 3.5.1 · Integral de un campo escalar sobre un segmento

Adaptado de: 1er extraordinario 2026-1, problema 3.

Calcule la integral de línea $\int_C (x + y)\, ds$, donde C es el segmento de recta que va del punto $A(0, 0)$ al punto $B(4, 3)$.

Resolución.

1. $\vec{r}(t) = A + t(B - A) = (4t,\ 3t)$, $0 \le t \le 1$.
2. $\vec{r}\,' = (4, 3)$, de donde $|\vec{r}\,'| = \sqrt{16 + 9} = 5$.
3. $f(\vec{r}(t)) = 4t + 3t = 7t$.
4. $\displaystyle\int_0^1 7t \cdot 5\, dt = 35\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^1 = \frac{35}{2}$.

Resultado: $\int_C (x + y)\, ds = \frac{35}{2}$.

Ejercicio 3.5.2 · Integral de un campo escalar sobre una hélice

Adaptado de: 1er extraordinario 2024-1, problema 4.

Calcule $\int_C f(x, y, z)\, ds$, donde $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy$ y C es la hélice $x = \cos t$, $y = \operatorname{sen} t$, $z = t$, recorrida en el intervalo $[-2\pi, 0]$.

Resolución.

1. $\vec{r}\,' = (-\operatorname{sen} t,\ \cos t,\ 1)$, de donde $|\vec{r}\,'| = \sqrt{\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t + 1} = \sqrt{2}$.
2. $f(\vec{r}(t)) = \cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t + t^2 + 2 \operatorname{sen} t \cos t = 1 + t^2 + \operatorname{sen} 2t$.
3. $\displaystyle\int_C f\, ds = \sqrt{2}\int_{-2\pi}^{0} \left(1 + t^2 + \operatorname{sen} 2t\right) dt = \sqrt{2}\left[t + \frac{t^3}{3} - \frac{\cos 2t}{2}\right]_{-2\pi}^{0}$.
4. El término del coseno vale $-\frac{1}{2}$ en los dos límites y se cancela. Queda $\sqrt{2}\left(2\pi + \frac{8\pi^3}{3}\right)$.

Resultado: $\int_C f\, ds = \dfrac{2\sqrt{2}\,\pi\,(3 + 4\pi^2)}{3}$.

Ejercicio 3.5.3 · Campo no conservativo sobre una elipse

Adaptado de: 2º extraordinario 2025-1, problema 4.

Obtenga $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$, donde $\vec{F}(x, y) = -y\,\hat{\imath} + x\,\hat{\jmath}$ y C es la parte de la elipse $\frac{x^2}{9} + y^2 = 1$ que se encuentra en el primer cuadrante, desde el punto $P(3, 0)$ hasta el punto $Q(0, 1)$.

Resolución.

1. $Q_x - P_y = 1 - (-1) = 2 \neq 0$: el campo **no** es conservativo. Hay que parametrizar.
2. $\vec{r}(t) = (3\cos t,\ \operatorname{sen} t)$. En P: $t = 0$; en Q: $t = \frac{\pi}{2}$.
3. $\vec{r}\,'(t) = (-3\operatorname{sen} t,\ \cos t)$ y $\vec{F}(\vec{r}(t)) = (-\operatorname{sen} t,\ 3\cos t)$.
4. $\vec{F} \cdot \vec{r}\,' = 3\operatorname{sen}^2 t + 3\cos^2 t = 3$.

Si el enunciado dice…	Se trata de…	Procedimiento
«área de la porción de la superficie $z = \ldots$ dentro del cilindro…»	área de superficie	4B.3.1
$\iint_S f\, dS$, «integral de superficie»	integral de superficie de una función	4B.3.2
«flujo a través de la superficie $z = \ldots$», sin tapa, «orientada hacia…»	flujo directo por una superficie abierta	4B.3.3
$\iiint_V f\, dV$, «sólido acotado por…»	integral triple	4B.3.4
«flujo neto», «superficie cerrada», esfera, cilindro con tapas, cono y plano, caja	teorema de Gauss	4B.3.5
lo mismo, con una divergencia que no es constante	Gauss con simetría o integrando	4B.3.6
«¿es más el fluido que entra del que sale en el punto A?»	signo de la divergencia	4B.3.7
$\vec{F} = \dfrac{x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} + z\hat{k}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$ sobre una esfera	campo radial unitario	4B.3.8
«circulación», «mediante el teorema de Stokes», curva cerrada en el espacio	teorema de Stokes	4B.3.9

4B.3 Procedimientos

4B.3.1 Área de una superficie

1. Si la superficie es $z = g(x, y)$, calcula g_x, g_y y $\sqrt{1 + g_x^2 + g_y^2}$. Si es paramétrica, calcula $\vec{r}_u \times \vec{r}_v$ y su norma.
2. Identifica la sombra R (el cilindro que la corta suele darla).
3. Escribe $A = \iint_R \sqrt{1 + g_x^2 + g_y^2}\, dA$ y pasa a polares si R es un disco.
4. La integral típica es $\displaystyle\int r\sqrt{1 + 4r^2}\, dr = \frac{(1 + 4r^2)^{3/2}}{12}$.

4B.3.2 Integral de superficie de una función

1. Parametriza la superficie con la tabla de 4B.1 y escribe dS.
2. Escribe los límites de los parámetros con las restricciones del enunciado (primer octante: $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$, $0 \le \phi \le \frac{\pi}{2}$).
3. Sustituye la parametrización en f y multiplica por el factor de dS.
4. Integra; separa en producto de integrales cuando se pueda.

4B.3.3 Flujo directo por una superficie abierta

1. Escribe la superficie como $z = g(x, y)$ y su normal hacia arriba $\vec{N} = (-g_x, -g_y, 1)$. Si piden la orientación hacia la parte negativa del eje Z, usa $-\vec{N}$.
2. Sustituye $z = g(x, y)$ en $\vec{F}$ y calcula $\vec{F} \cdot \vec{N}$.
3. Obtén la sombra R: si dice $z \ge c$, iguala $g = c$.
4. Flujo $= \iint_R \vec{F} \cdot \vec{N}\, dA$, en polares si R es un disco.

Resolución.

1. $Q_z = -4xy\,(-\operatorname{sen} z) = 4xy \operatorname{sen} z$ y $R_y = 4xy \operatorname{sen} z$: componente $\hat{\imath}$ nula.
2. $P_z = -2y^2(-\operatorname{sen} z) = 2y^2 \operatorname{sen} z$ y $R_x = 2y^2 \operatorname{sen} z$: componente $\hat{\jmath}$ nula.
3. $P_y = -4y \cos z$ y $Q_x = -4y \cos z$: componente $\hat{k}$ nula. El campo es conservativo y la recta no importa.
4. $\varphi = \int -2y^2 \cos z\, dx = -2xy^2 \cos z + g(y,z)$. Al derivar: $\varphi_y = -4xy \cos z + g_y = Q \Rightarrow g_y = 0$, y $\varphi_z = 2xy^2 \operatorname{sen} z + g_z = R \Rightarrow g_z = 0$. Entonces $\varphi = -2xy^2 \cos z$.
5. $\varphi(B) = -2\sqrt{2} \cdot 4 \cdot \cos\frac{3\pi}{4} = -8\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 8$.
6. $\varphi(A) = -2\sqrt{2} \cdot 1 \cdot \cos\frac{\pi}{4} = -2\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = -2$.

Resultado: $W = 8 - (-2) =$ **10** unidades de trabajo.

Ejercicio 3.5.7 · Constantes para un campo solenoidal y conservativo

Adaptado de: 1er extraordinario 2026-1, problema 4.

Determine el valor de las constantes a, b y c de forma que el campo $\vec{F}(x,y,z) = (x-by)\,\hat{\imath} + (y+ax)\,\hat{\jmath} + (bz-cy)\,\hat{k}$ sea solenoidal y conservativo a la vez. Con los valores obtenidos, encuentre la función potencial de $\vec{F}$.

Resolución.

1. Derivadas: $P_y = -b$, $P_z = 0$; $Q_x = a$, $Q_z = 0$; $R_x = 0$, $R_y = -c$.
2. Rotacional: $\big(-c-0,\ -(0-0),\ a-(-b)\big) = (-c,\ 0,\ a+b)$. Conservativo: $c = 0$ y $a = -b$.
3. Divergencia: $1 + 1 + b = 0 \Rightarrow b = -2$, y entonces $a = 2$.
4. $\vec{F} = (x+2y)\,\hat{\imath} + (2x+y)\,\hat{\jmath} - 2z\,\hat{k}$.
5. $\varphi = \int (x+2y)\,dx = \frac{x^2}{2} + 2xy + g(y,z)$; $\varphi_y = 2x + g_y = 2x + y \Rightarrow g = \frac{y^2}{2} + h(z)$; $\varphi_z = h'(z) = -2z \Rightarrow h = -z^2$.

Resultado: $a = 2$, $b = -2$, $c = 0$ y $\varphi = \frac{x^2}{2} + 2xy + \frac{y^2}{2} - z^2$. El término $2xy$ aparece una sola vez.

Ejercicio 3.5.8 · Trabajo en coordenadas polares

Adaptado de: 1er extraordinario 2024-2, problema 4 (repetido en el 1er extraordinario 2025-1).

Sea el campo vectorial $\vec{F}(r,\theta) = (r\cos 2\theta)\,\hat{e}_r - (r \operatorname{sen} 2\theta)\,\hat{e}_\theta$. Calcule el trabajo realizado sobre una partícula a lo largo de la curva $x^2 + 2y + y^2 = 0$, del punto $A(0,-2)$ al punto $B(1,-1)$.

Planteamiento. En polares $\vec{F}\cdot d\vec{r} = F_r\,dr + F_\theta\, r\,d\theta = r\cos 2\theta\,dr - r^2 \operatorname{sen} 2\theta\,d\theta$. Se busca φ con $\varphi_r = r\cos 2\theta$ y $\varphi_\theta = -r^2 \operatorname{sen} 2\theta$.

Resolución.

1. $\varphi = \int r\cos 2\theta\,dr = \frac{1}{2}r^2 \cos 2\theta + g(\theta)$.
2. $\varphi_\theta = -r^2 \operatorname{sen} 2\theta + g'(\theta) = -r^2 \operatorname{sen} 2\theta \Rightarrow g' = 0$. Entonces $\varphi = \frac{1}{2}r^2\cos 2\theta = \frac{1}{2}(x^2 - y^2)$, porque $r^2\cos 2\theta = r^2(\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta) = x^2 - y^2$.
3. El campo es conservativo y la curva (la circunferencia $x^2 + (y+1)^2 = 1$) ya no importa.
4. $\varphi(B) = \frac{1}{2}(1-1) = 0$ y $\varphi(A) = \frac{1}{2}(0-4) = -2$.

Superficie	Parametrización	dS	Normal unitaria exterior
Gráfica $z = g(x,y)$	$(x,\ y,\ g(x,y))$	$\sqrt{1 + g_x^2 + g_y^2}\,dA$	$\pm\frac{(-g_x,-g_y,1)}{\sqrt{1+g_x^2+g_y^2}}$
Plano $z = c$	$(x,\ y,\ c)$	dA	$\pm\hat{k}$

En la esfera, $0 \le \phi \le \pi$ (desde el polo norte) y $0 \le \theta \le 2\pi$.

Área de una superficie e integral de superficie.

$$A(S) = \iint_S dS = \iint_D \left|\vec{r}_u \times \vec{r}_v\right| du\,dv, \qquad \iint_S f\,dS = \iint_D f\big(\vec{r}(u,v)\big)\left|\vec{r}_u \times \vec{r}_v\right| du\,dv$$

Flujo. El flujo de un campo $\vec{F}$ a través de una superficie orientada es

$$\iint_S \vec{F}\cdot\hat{n}\,dS = \iint_D \vec{F}\big(\vec{r}(u,v)\big)\cdot\big(\vec{r}_u \times \vec{r}_v\big)\,du\,dv$$

- Mide cuánto campo **atraviesa** la superficie. Si se invierte la normal, el flujo cambia de signo.
- En una superficie **cerrada** se usa la normal **exterior**: un flujo positivo significa que sale más campo del que entra.
- En la forma de la derecha no se divide entre $|\vec{N}|$: la norma se cancela con la de dS.

Integral triple. Para f continua en un sólido V, $\iiint_V f\,dV$ es el límite de las sumas de $f\,\Delta V$. Con $f = 1$ da el **volumen**. Se calcula con integrales reiteradas: z de piso a techo, luego la sombra en el plano XY.

Coordenadas	Cambio	dV
Cilíndricas	$x = r\cos\theta$, $y = r\operatorname{sen}\theta$, $z = z$	$r\,dr\,d\theta\,dz$
Esféricas	$x = \rho\operatorname{sen}\phi\cos\theta$, $y = \rho\operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\theta$, $z = \rho\cos\phi$	$\rho^2\operatorname{sen}\phi\,d\rho\,d\phi\,d\theta$

El factor de dV es el jacobiano de la transformación ($|J| = r$ en cilíndricas, $\rho^2\operatorname{sen}\phi$ en esféricas).

Divergencia. Para $\vec{F} = P\,\hat{\imath} + Q\,\hat{\jmath} + R\,\hat{k}$:

$$\nabla\cdot\vec{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

Si $\vec{F} = F_r\,\hat{e}_r + F_\theta\,\hat{e}_\theta + F_z\,\hat{e}_z$ está en cilíndricas:

$$\nabla\cdot\vec{F} = \frac{1}{r}\frac{\partial(r\,F_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial F_\theta}{\partial\theta} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$$

- $\nabla\cdot\vec{F} > 0$ en un punto: es una **fuente**, sale más fluido del que entra.

Resultado: $\varphi = \frac{1}{2}r^2z^2\,\mathrm{sen}^2\theta$ y $W = -1$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 95.

Ejercicio propuesto 3.6.3

Adaptado de: 3er extraordinario 2024-1, problema 4 (repetido en el 2º final 2024-1, tipo A).

Obtenga el trabajo que efectúa el campo de fuerzas $\vec{F}(r,\theta) = \theta\,\hat{e}_r - \hat{e}_\theta$ en el movimiento de una partícula desde el punto $A(2,0)$ hasta el punto $B\left(2, \frac{\pi}{2}\right)$ a lo largo del arco de circunferencia que los une. El campo y los puntos están en coordenadas polares.

Resultado: $W = -\pi$ (el campo no es conservativo).

→ Resolución en el Apéndice E, p. 95.

Ejercicio propuesto 3.6.4

Adaptado de: 1er final 2024-2, problema 4.

Sea $\vec{F}(x,y,z) = x^2\,\hat{\imath} + y^2\,\hat{\jmath} + z^2\,\hat{k}$. Determine $\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r}$ a lo largo de la trayectoria C: $x = y^2$, $z = 0$, del punto $O(0,0,0)$ al punto $P(2,\sqrt{2},0)$.

Resultado: $\varphi = \frac{1}{3}(x^3+y^3+z^3)$ y $\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = \dfrac{8+2\sqrt{2}}{3}$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 95.

Ejercicio propuesto 3.6.5

Adaptado de: 2º final 2024-2, tipo A, problema 4.

Calcule el trabajo realizado por el campo de fuerzas $\vec{F}(x,y,z) = (-y^3-2y+2z^4)\,\hat{\imath} + (-2x-3xy^2+z)\,\hat{\jmath} + (y+8xz^3+6)\,\hat{k}$ en el movimiento de una partícula a lo largo del segmento de recta que une al punto $A(-1,2,1)$ con el punto $B(1,0,1)$.

Resultado: $\varphi = -xy^3 - 2xy + 2xz^4 + yz + 6z$ y $W = -10$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 96.

Ejercicio propuesto 3.6.6

Adaptado de: 2º final 2025-1, tipo A, problema 4.

Sea el campo de fuerzas $\vec{F}(r,\theta) = 4r^3\,\mathrm{sen}\,\theta\,\hat{e}_r + r^3\cos\theta\,\hat{e}_\theta$. Determine el trabajo que realiza al desplazar una partícula desde el punto $A(0,0)$ hasta el punto $B\left(1, \frac{\pi}{2}\right)$ a lo largo de la recta que los une. El campo y los puntos están en coordenadas polares.

Resultado: $\varphi = r^4\,\mathrm{sen}\,\theta$ y $W = 1$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 96.

Ejercicio propuesto 3.6.7

Adaptado de: 2º final 2025-2, tipo A, problema 4.

Calcule el trabajo realizado por el campo de fuerzas $\vec{F}(x,y) = y\,\hat{\imath} - x\,\hat{\jmath}$ cuando una partícula se desplaza sobre la trayectoria triangular con vértices en $A(0,0)$, $B(1,0)$ y $C(0,1)$, recorrida en sentido antihorario.

Resultado: $W = -1$.

- Disco πa^2 · elipse πab · cilindro $\pi r^2 h$ · cono $\frac{1}{3}\pi r^2 h$.

4A.9 Procedimiento recomendado en el examen

1. Dibuja la región (o la sombra del sólido) con sus intersecciones.
2. Decide coordenadas: cartesianas si las fronteras son rectas y parábolas; polares si hay x^2+y^2; u, v si el enunciado las sugiere.
3. Escribe el elemento de área **con su jacobiano** antes de poner límites.
4. Escribe los límites: los de adentro pueden tener letras; los de afuera, solo números.
5. Para Green: P, Q, $Q_x - P_y$, la región y el sentido, en ese orden.
6. Integra de adentro hacia afuera, un renglón por integral, y recuadra el resultado exacto.

Si no se encuentra el camino, escribe el dibujo, el elemento de área, los límites y la integral planteada completa. El planteamiento correcto también cuenta.

10. **Constantes:** $a + b = 0$ da $a = -b$; no se divide entre una constante que podría ser cero.

3.8 Formulario de emergencia de la unidad

- $\int_C f\,ds = \int_a^b f(\vec{r}(t))\,|\vec{r}\,'(t)|\,dt \cdot \int_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_a^b \vec{F}(\vec{r}(t))\cdot\vec{r}\,'(t)\,dt = \int_C P\,dx + Q\,dy + R\,dz$.
- Segmento $\vec{r} = A + t(B-A)$, $t \in [0,1]$ · circunferencia $(x_0 + R\cos t,\ y_0 + R\,\mathrm{sen}\,t)$ · elipse $(a\cos t,\ b\,\mathrm{sen}\,t)$.
- $\nabla \times \vec{F} = \big(R_y - Q_z,\ -(R_x - P_z),\ Q_x - P_y\big)$ · $\nabla\cdot\vec{F} = P_x + Q_y + R_z$.
- Conservativo: $\nabla\times\vec{F} = \vec{0} \Rightarrow \vec{F} = \nabla\varphi \Rightarrow W = \varphi(B) - \varphi(A)$; curva cerrada $\Rightarrow W = 0$. Solenoidal: $\nabla\cdot\vec{F} = 0$.
- Potencial: $\varphi = \int P\,dx + g(y,z) \longrightarrow$ derivar e igualar a $Q \longrightarrow$ derivar e igualar a $R \longrightarrow$ comprobar.
- $\vec{F}\cdot d\vec{r} = h_1F_1\,dq_1 + h_2F_2\,dq_2 + h_3F_3\,dq_3$ · polares y cilíndricas $h = (1, r, 1)$ · esféricas $h = (1, \rho\,\mathrm{sen}\,\phi, \rho)$.
- Gravedad: $W = w\,\Delta z$.
- $(\mathrm{sen}\,u)' = \cos u\cdot u'$ · $(\cos u)' = -\mathrm{sen}\,u\cdot u'$ · $\int_0^{2\pi}\mathrm{sen}^2 t\,dt = \int_0^{2\pi}\cos^2 t\,dt = \pi\cdot e^{2\ln 3} = 9$.

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
$\mathrm{sen}\,\theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0
$\cos\theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1

3.9 Procedimiento recomendado en el examen

1. Escribe arriba qué se pide: $\int_C f\,ds$ (escalar) o $\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r}$ (trabajo).
2. Para un trabajo, escribe P, Q y R, la tabla de seis derivadas y el rotacional con el patrón $+\ -\ +$.
3. Si $\nabla\times\vec{F} = \vec{0}$, escribe «el campo es conservativo y la integral es independiente de la trayectoria».
4. Obtén φ y **compruébala** derivando.
5. Calcula $\varphi(B) - \varphi(A)$ con la tabla de senos y cosenos. Deja el resultado exacto y recuadrado, con unidades si las hay.
6. Si el rotacional no es nulo, parametriza: $\vec{r}(t)$, límites, $\vec{r}\,'(t)$, $\vec{F}(\vec{r}(t))$ y el producto punto.

Si no se encuentra el camino, escribe el campo (P, Q, R), el determinante del rotacional con las seis derivadas, la frase «si $\nabla\times\vec{F} = \vec{0}$, entonces $W = \varphi(B) - \varphi(A)$» y el arranque $\varphi = \int P\,dx + g(y,z)$; o bien $\vec{r}(t)$, $\vec{r}\,'(t)$ y la integral planteada con sus límites. El planteamiento correcto también cuenta.

Ejercicio propuesto 4A.6.1

Adaptado de: 2º final 2025-1, tipo A, problema 5.

Obtenga $I = \iint_R \cos\!\left(\frac{\pi}{2}\left(x^2+y^2\right)\right) dx\,dy$, donde R es la región del primer cuadrante entre las circunferencias con centro en el origen y radios 1 y 2.

Resultado: $I = -\frac{1}{2}$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 97.

Ejercicio propuesto 4A.6.2

Adaptado de: 1er final 2016-1, tipo C, problema 5.

Calcule el área de la región del plano XY limitada por las gráficas de $xy = 7$ y $x + y = 8$.

Resultado: $A = 24 - 7\ln 7$ u².

→ Resolución en el Apéndice E, p. 97.

Ejercicio propuesto 4A.6.3

Adaptado de: 1er final 2017-1, tipo C, problema 5.

Por medio de una integral doble, calcule el área de la región limitada por $x^2 + y^2 = 9$ y $x + y = 3$ (el segmento circular más pequeño).

Resultado: $A = \frac{9\pi}{4} - \frac{9}{2} = \frac{9}{4}(\pi - 2)$ u².

→ Resolución en el Apéndice E, p. 97.

Ejercicio propuesto 4A.6.4

Adaptado de: 2º extraordinario 2018-1, tipo A, problema 5.

Calcule el área de la región que es interior a las curvas polares $r = e$ y $r = 2e\,\mathrm{sen}\,\theta$.

Resultado: $A = e^2\left(\frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ u².

→ Resolución en el Apéndice E, p. 97.

Ejercicio propuesto 4A.6.5

Adaptado de: 1er final 2018-2, tipo C, problema 5.

Calcule el volumen limitado por las superficies $z = 0$, $y + z = 16$ y $x^2 + y^2 = 4$.

Resultado: $V = 64\pi$ u³.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 98.

Ejercicio propuesto 4A.6.6

Adaptado de: 1er final 2018-2, tipo A, problema 5.

Calcule $\oint_C xy\,dx + (x+y)\,dy$, donde C es la frontera de la región situada entre $x^2 + y^2 = 9$ y $x^2 + y^2 = 16$, con $y \geq 0$.

Resultado: $\frac{7\pi}{2}$ (sentido positivo).

→ Resolución en el Apéndice E, p. 98.

- Si una región es de los dos tipos, el resultado no depende del orden. Cuando una integral interior no tiene primitiva elemental ($\int e^{x^2}dx$, $\int \frac{e^{3u}}{u}du$), se **cambia el orden**.

Coordenadas polares. Con $x = r\cos\theta$, $y = r\,\mathrm{sen}\,\theta$:

$$x^2 + y^2 = r^2, \qquad dA = r\,dr\,d\theta$$

El factor r es el jacobiano de la transformación. Un disco, un anillo o un sector circular son «rectángulos» en r y θ:

Región	Límites
disco $x^2 + y^2 \le a^2$	$0 \le r \le a$, $0 \le \theta \le 2\pi$
anillo $a^2 \le x^2 + y^2 \le b^2$	$a \le r \le b$, $0 \le \theta \le 2\pi$
primer cuadrante	$0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$
semiplano $y \ge 0$	$0 \le \theta \le \pi$
curva polar $r = g(\theta)$	$0 \le r \le g(\theta)$, θ entre dos raíces de g

Cambio de variable. Si $x = x(u,v)$, $y = y(u,v)$ transforma una región R' del plano UV en la región R del plano XY:

$$\iint_R f(x,y)\,dA = \iint_{R'} f\big(x(u,v), y(u,v)\big)\left|J\left(\frac{x,y}{u,v}\right)\right| du\,dv, \qquad J\left(\frac{x,y}{u,v}\right) = \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix}$$

- En la integral va el **valor absoluto** del jacobiano: un área nunca es negativa.
- Si el enunciado da $u(x,y)$ y $v(x,y)$, es más rápido calcular el jacobiano inverso y usar el recíproco: $J\left(\frac{x,y}{u,v}\right) = \dfrac{1}{J\left(\frac{u,v}{x,y}\right)}$.
- Las fronteras de R dicen los límites: si R está limitada por $x-y=0$, $x-y=2$, $x+y=0$, $x+y=3$, con $u = x-y$ y $v = x+y$ la región nueva es el rectángulo $0 \le u \le 2$, $0 \le v \le 3$.

Teorema de Green. Sea C una curva cerrada simple, recorrida en **sentido positivo** (antihorario: la región queda a la izquierda), que limita una región R. Si P y Q tienen derivadas parciales continuas en R:

$$\oint_C P\,dx + Q\,dy = \iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA$$

- Cambia una integral de línea difícil por una doble sencilla. Conviene cuando P o Q tienen términos sin primitiva ($e^{\sqrt{x}}$, sen y) que **desaparecen al derivar**: $e^{\sqrt{x}}$ no depende de y, así que no aparece en P_y.
- Si la curva se recorre en sentido horario, el resultado cambia de signo.
- Si la región tiene un hueco (un anillo), la frontera son las dos curvas: la exterior en sentido antihorario y la interior en sentido horario. Green se aplica igual sobre toda la región.

Ejercicio 4A.5.5 · Volumen entre un cono y un cilindro

Adaptado de: 2º extraordinario 2024-2, problema 6.

Calcule el volumen de la región limitada por las superficies $z^2 = x^2 + y^2$ y $x^2 + y^2 = 1$.

Resolución.

1. $z^2 = r^2 \Rightarrow z = \pm r$: el cono tiene **dos hojas**, una arriba y otra abajo del plano XY. El cilindro da la sombra $0 \le r \le 1$.
2. Techo $z = r$, piso $z = -r$; altura $r - (-r) = 2r$.
3. $V = \displaystyle\int_0^{2\pi}\int_0^1 2r \cdot r\,dr\,d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{2}{3}\,d\theta$.

Resultado: $V = \frac{4\pi}{3}$ u³.

> Si solo se toma la hoja superior ($0 \le z \le r$) resulta $\frac{2\pi}{3}$. El enunciado no la restringe, así que la región incluye las dos hojas. Conviene escribirlo en la respuesta.

Ejercicio 4A.5.6 · Cambio de variable

Adaptado de: 1er extraordinario 2024-2, problema 5 (repetido en el 1er extraordinario 2025-1).

Calcule $\displaystyle\iint_D (x+y)\,e^{x^2-y^2}\,dA$ sobre la región D limitada por $x-y=0$, $x-y=2$, $x+y=0$ y $x+y=3$. Sugerencia: use $u = x-y$, $v = x+y$.

Resolución.

1. Límites: $0 \le u \le 2$, $0 \le v \le 3$.
2. $J\left(\frac{u,v}{x,y}\right) = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 1 = 2$, así que $J\left(\frac{x,y}{u,v}\right) = \frac{1}{2}$ y $dA = \frac{1}{2}\,du\,dv$.
3. Comprobación: $x = \frac{u+v}{2}$, $y = \frac{v-u}{2}$ dan $\begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$.
4. Integrando: $x + y = v$ y $x^2 - y^2 = (x-y)(x+y) = uv$.
5. $\frac{1}{2}\displaystyle\int_0^3\int_0^2 v\,e^{uv}\,du\,dv$. Primero en u (v constante): $\displaystyle\int_0^2 v\,e^{uv}\,du = \Big[e^{uv}\Big]_{u=0}^{u=2} = e^{2v} - 1$.
6. En v: $\frac{1}{2}\displaystyle\int_0^3 \left(e^{2v} - 1\right)dv = \frac{1}{2}\left[\frac{e^{2v}}{2} - v\right]_0^3 = \frac{1}{2}\left(\frac{e^6}{2} - 3 - \frac{1}{2}\right)$.

Resultado: $\frac{e^6 - 7}{4}$.

> Si se integra primero en v aparece $\int \frac{e^{3u}}{u}\,du$, que no tiene primitiva elemental. El orden sí importa para poder calcular.

Ejercicio 4A.5.7 · Green entre dos cuartos de circunferencia

Adaptado de: 1er extraordinario 2018-1, tipo A, problema 5.

Utilice el teorema de Green para calcular $\displaystyle\oint_C \left(4 + e^{\sqrt{x}}\right)dx + \left(\mathrm{sen}\,y + 3x^2\right)dy$, donde C es la frontera de la región entre dos cuartos de circunferencia del primer cuadrante, de radios 4 y 9.

4. Escribe $A = \int_a^b \int_{\text{piso}}^{\text{techo}} dy\,dx = \int_a^b (\text{techo} - \text{piso})\,dx$.
5. Integra y comprueba que el resultado sea positivo.

4A.3.2 Volumen con integral doble

1. Identifica el **techo** $z_2(x,y)$ y el **piso** $z_1(x,y)$. Si dice «arriba del plano XY», el piso es $z = 0$.
2. Obtén la **sombra** R del sólido en el plano XY: casi siempre la da un cilindro ($x^2+y^2=1$) o la intersección del techo con el piso.
3. Escribe $V = \iint_R (z_2 - z_1)\,dA$.
4. Si la sombra es un disco o un anillo, pasa a polares (4A.3.3).
5. Si la integral interior no sale, cambia el orden de integración y recalcula los límites con el dibujo.

4A.3.3 Integral doble en polares

1. Traduce: $x^2+y^2 = r^2$, $\sqrt{x^2+y^2} = r$, $x = r\cos\theta$, $y = r\,\text{sen}\,\theta$.
2. Escribe $dA = r\,dr\,d\theta$. **La r del jacobiano no se olvida.**
3. Límites de r: el radio es la raíz del número de la circunferencia ($x^2+y^2 = 9 \Rightarrow r = 3$).
4. Límites de θ con el dibujo: vuelta completa 0 a 2π; primer cuadrante 0 a $\frac{\pi}{2}$; semiplano $y \geq 0$, 0 a π.
5. Integra primero en r y después en θ. Si ya no queda θ, multiplica por la longitud del intervalo de θ.
6. Para una rosa $r = a\,\text{sen}\,n\theta$, un pétalo va entre dos ceros consecutivos de $\text{sen}\,n\theta$: $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{n}$.

4A.3.4 Cambio de variable

1. Lee las fronteras y escribe los límites de u y de v: la región nueva suele ser un rectángulo.
2. Calcula $J\left(\frac{u,v}{x,y}\right) = \begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix}$ y toma el recíproco, o despeja $x(u,v)$, $y(u,v)$ y calcula $J\left(\frac{x,y}{u,v}\right)$ directamente.
3. Escribe $dA = \left|J\left(\frac{x,y}{u,v}\right)\right| du\,dv$.
4. Reescribe el integrando en u y v. Busca factorizaciones: $x^2 - y^2 = (x-y)(x+y) = uv$.
5. Elige el orden que haga sencilla la primera integral.

4A.3.5 Teorema de Green

1. Identifica P (lo que multiplica a dx) y Q (lo que multiplica a dy).
2. Calcula $Q_x - P_y$. En Q_x la y se trata como constante; en P_y, la x.
3. Describe la región R que encierra C, con un dibujo.
4. Revisa el sentido de C: si es antihorario, la integral de línea es $\iint_R (Q_x - P_y)\,dA$; si es horario, cambia el signo. Si el enunciado no lo dice, se usa el sentido positivo y se escribe así.
5. Calcula la integral doble, en polares si la región es circular.

4A.3.6 Área con el teorema de Green

1. Parametriza la frontera en sentido antihorario: elipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} = 1$, $x = a\cos t$, $y = b\,\text{sen}\,t$, $0 \leq t \leq 2\pi$.
2. Calcula $x\,dy - y\,dx$ en términos de t.
3. $A = \frac{1}{2}\oint_C x\,dy - y\,dx$.

4A.4 Ejemplo resuelto

Adaptado de: 1er extraordinario 2025-2, problema 5.

Calcule el volumen de la región que está debajo de la superficie $z = 2x^2 + 2y^2$, arriba del plano XY y en el interior del cilindro $x^2 + y^2 = 1$.

Datos: techo $z = 2x^2 + 2y^2$; piso $z = 0$; sombra: disco $x^2 + y^2 \leq 1$ [u].

Planteamiento.

- El volumen es $V = \iint_R (z_{techo} - z_{piso})\,dA = \iint_R (2x^2 + 2y^2)\,dA$, con R el disco de radio 1.
- En polares: $2x^2 + 2y^2 = 2r^2$, $dA = r\,dr\,d\theta$, $0 \leq r \leq 1$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

Resolución.

1. $V = \int_0^{2\pi}\int_0^1 2r^2 \cdot r\,dr\,d\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^1 2r^3\,dr\,d\theta$.
2. En r: $\int_0^1 2r^3\,dr = 2 \cdot \frac{r^4}{4}\Big|_0^1 = \frac{1}{2}$.
3. En θ: $\int_0^{2\pi} \frac{1}{2}\,d\theta = \frac{1}{2} \cdot 2\pi = \pi$.

Resultado: $V = \pi$ u³.

> El cilindro de radio 1 y altura 2 (la altura del paraboloide en el borde) tiene volumen 2π. El sólido debajo del paraboloide ocupa exactamente la mitad.

4A.5 Ejercicios de examen (resueltos)

Ejercicio 4A.5.1 · Área entre dos parábolas

Adaptado de: 2º final 2025-2, tipo A, problema 5.

Mediante una integral doble, calcule el área de la región limitada por las parábolas $y^2 = ax$ y $x^2 = ay$, con $a > 0$.

Resolución.

1. Intersecciones: de $x^2 = ay$, $y = \frac{x^2}{a}$. En $y^2 = ax$: $\frac{x^4}{a^2} = ax \Rightarrow x(x^3 - a^3) = 0$, así que $x = 0$ o $x = a$.
2. Entre 0 y a, el techo es $y = \sqrt{ax}$ y el piso, $y = \frac{x^2}{a}$ (en $x = \frac{a}{2}$: $\frac{a}{\sqrt{2}} > \frac{a}{4}$).
3. $A = \int_0^a \int_{x^2/a}^{\sqrt{ax}} dy\,dx = \int_0^a \left(\sqrt{a}\,x^{1/2} - \frac{x^2}{a}\right) dx$.
4. $= \sqrt{a} \cdot \frac{2}{3}a^{3/2} - \frac{a^3}{3a} = \frac{2}{3}a^2 - \frac{1}{3}a^2$.

Resultado: $A = \frac{a^2}{3}$ u².