

2. Calcula $\vec{r}'(t)$ y su norma $|\vec{r}'(t)| = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}$. En un segmento es la longitud $|B - A|$; en una circunferencia de radio R , es R .
3. Sustituye $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ en f .
4. Integra $\int_a^b f(\vec{r}(t)) |\vec{r}'(t)| dt$.

3.3.2 Trabajo parametrizando la curva

1. Escribe $\vec{r}(t)$ y encuentra los valores de t que corresponden a A y a B sustituyendo sus coordenadas. Por ejemplo, en $(3 \cos t, \sin t)$ el punto $(3, 0)$ corresponde a $t = 0$ y el $(0, 1)$ a $t = \frac{\pi}{2}$.
2. Deriva cada componente: $\vec{r}'(t)$.
3. Sustituye la curva en el campo: $\vec{F}(\vec{r}(t))$.
4. Haz el producto punto $\vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t)$ y simplifica; casi siempre aparece $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$.
5. Integra de t_A a t_B . Si la curva tiene varios tramos, suma las integrales.

3.3.3 ¿Es conservativo? El rotacional

1. Identifica P , Q y R .
2. Calcula aparte las seis derivadas cruzadas:

	∂_x	∂_y	∂_z
P	—	P_y	P_z
Q	Q_x	—	Q_z
R	R_x	R_y	—

3. Compara las tres parejas: R_y con Q_z , R_x con P_z , Q_x con P_y .
4. Escribe el rotacional con el patrón de signos $+-$: $\nabla \times \vec{F} = (R_y - Q_z, -(R_x - P_z), Q_x - P_y)$.
5. Si las tres parejas son iguales, $\nabla \times \vec{F} = \vec{0}$: el campo es conservativo (en $\mathbb{R}^3$ o en una región simplemente conexa) y la integral es independiente de la trayectoria. Sigue con 3.3.4.
6. Si alguna pareja es distinta, el campo no es conservativo: sigue con 3.3.2.

3.3.4 Función potencial y trabajo

1. Integra P respecto a x , con y y z como constantes: $\varphi = \int P dx + g(y, z)$.
2. Deriva ese φ respecto a y , iguala a Q y despeja g_y .
3. Integra g_y respecto a y : $g = \dots + h(z)$. Actualiza φ .
4. Deriva respecto a z , iguala a R , despeja $h'(z)$ e integra.
5. **Comprueba** que $\varphi_x = P$, $\varphi_y = Q$ y $\varphi_z = R$.
6. Calcula $W = \varphi(B) - \varphi(A)$: **final menos inicial**.

Es el mismo método que el de las ecuaciones diferenciales exactas, con una variable más.

3.3.5 Constantes para que el campo sea conservativo y solenoidal

1. Calcula el rotacional dejando las constantes como letras (3.3.3).
2. Cada componente del rotacional igualada a cero es una ecuación.

Resultado: $\vec{a}_T = \vec{0}$, $\vec{a}_N = 2\hat{j}$ y $\kappa = 2$. En $t = 1$ la partícula no acelera ni frena: solo gira, como en una circunferencia de radio $\frac{1}{2}$.

Ejercicio 2A.5.2 · Funciones hiperbólicas

Adaptado de: 2º extraordinario 2025-2, problema 2.

La posición de una partícula está dada por $\vec{r}(t) = \cosh t \hat{i} + \sinh t \hat{j} + \hat{k}$, donde t es el tiempo. Obtenga en el instante $t = 0$:

- a) unas ecuaciones cartesianas de la curva;
- b) los vectores aceleración normal y aceleración tangencial;
- c) la curvatura y la torsión.

Resolución.

1. a) Como $\cosh^2 t - \sinh^2 t = 1$: $x^2 - y^2 = 1$, $z = 1$, en la rama $x > 0$ porque $\cosh t \geq 1$.
2. $\vec{r}' = (\sinh t, \cosh t, 0) \Rightarrow (0, 1, 0)$; $\vec{r}'' = (\cosh t, \sinh t, 0) \Rightarrow (1, 0, 0)$; $\vec{r}''' \Rightarrow (0, 1, 0)$.
3. b) $|\vec{v}| = 1$ y $\vec{v} \cdot \vec{a} = 0$, así que $\vec{a}_T = \vec{0}$ y $\vec{a}_N = \vec{a} = \hat{i}$.
4. $\vec{v} \times \vec{a} = (0, 1, 0) \times (1, 0, 0) = (0, 0, -1)$, con norma 1.
5. c) $\kappa = \frac{1}{1^3} = 1$ y $\tau = \frac{(0, 0, -1) \cdot (0, 1, 0)}{1^2} = 0$.

Resultado: $x^2 - y^2 = 1$, $z = 1$ ($x > 0$); $\vec{a}_N = \hat{i}$, $\vec{a}_T = \vec{0}$; $\kappa = 1$ y $\tau = 0$. La torsión nula confirma que la curva es plana: está en el plano $z = 1$.

Ejercicio 2A.5.3 · Triedro, curvatura, torsión y plano osculador

Adaptado de: 2º extraordinario 2018-1, tipo A, problema 3.

Sea la curva $C : \vec{r}(t) = 2 \sin t \hat{i} + 3 \cos t \hat{j} + 6 \hat{k}$. Determine, para el punto $P(0, -3, 6)$:

- a) los vectores $\hat{T}$, $\hat{N}$ y $\hat{B}$;
- b) la curvatura y la torsión;
- c) la ecuación cartesiana del plano osculador.

Resolución.

1. $3 \cos t = -3 \Rightarrow t_0 = \pi$. Comprobación: $2 \sin \pi = 0$.
2. $\vec{r}' = (2 \cos t, -3 \sin t, 0) \Rightarrow (-2, 0, 0)$; $\vec{r}'' = (-2 \sin t, -3 \cos t, 0) \Rightarrow (0, 3, 0)$; $\vec{r}''' = (-2 \cos t, 3 \sin t, 0) \Rightarrow (2, 0, 0)$.
3. $\vec{r}' \times \vec{r}'' = (-2, 0, 0) \times (0, 3, 0) = (0, 0, -6)$, con norma 6; $|\vec{r}'| = 2$.
4. a) $\hat{T} = (-1, 0, 0)$, $\hat{B} = (0, 0, -1)$ y $\hat{N} = \hat{B} \times \hat{T} = (0, 1, 0)$.
5. b) $\kappa = \frac{6}{2^3} = \frac{3}{4}$ y $\tau = \frac{(0, 0, -6) \cdot (2, 0, 0)}{36} = 0$.
6. c) Normal $(0, 0, -6)$ por P : $-6(z - 6) = 0$.

Resultado: $\hat{T} = -\hat{i}$, $\hat{N} = \hat{j}$, $\hat{B} = -\hat{k}$; $\kappa = \frac{3}{4}$, $\tau = 0$; plano osculador $z = 6$ (la elipse está en ese plano).

Ejercicio 2A.5.4 · Torsión negativa

Adaptado de: 1er final 2017-1, tipo A, problema 2.

Una partícula se desplaza a lo largo de la curva $\vec{r}(t) = 2e^t \hat{i} + \cos t \hat{j} + (t^3 + 3) \hat{k}$, donde t es el tiempo. Calcule, para el punto $P(2, 1, 3)$:

Rotacional y divergencia. Para $\vec{F} = (P, Q, R)$:

$$\nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ P & Q & R \end{vmatrix} = (R_y - Q_z, -(R_x - P_z), Q_x - P_y), \quad \nabla \cdot \vec{F} = P_x + Q_y + R_z$$

- $\vec{F}$ es **irrotacional** si $\nabla \times \vec{F} = \vec{0}$.
- $\vec{F}$ es **solenoidal** si $\nabla \cdot \vec{F} = 0$.
- En el plano, con $\vec{F} = (P, Q)$, solo queda la componente $\hat{k}$: $Q_x - P_y$.

Campo conservativo y función potencial. $\vec{F}$ es **conservativo** si existe una función escalar φ , llamada **función potencial**, tal que $\nabla \varphi = \vec{F}$, es decir, $\varphi_x = P$, $\varphi_y = Q$, $\varphi_z = R$. En una región simplemente conexa (sin «agujeros», como todo $\mathbb{R}^3$) son equivalentes:

Afirmación	Significado
$\nabla \times \vec{F} = \vec{0}$	el campo es irrotacional
$\vec{F} = \nabla \varphi$	existe función potencial
$P dx + Q dy + R dz = d\varphi$	la expresión diferencial es una diferencial exacta
$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ solo depende de A y B	la integral es independiente de la trayectoria
$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$ para toda curva cerrada	el trabajo en un circuito es nulo

Teorema fundamental de las integrales de línea. Si $\vec{F} = \nabla \varphi$, entonces

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \varphi(B) - \varphi(A)$$

para **cualquier** curva de A a B : no hace falta parametrizar. El físico llama energía potencial a $-\varphi$; la cuenta es la misma.

Integrales de línea en coordenadas curvilíneas ortogonales. Con factores de escala h_1, h_2, h_3 :

$$d\vec{r} = h_1 dq_1 \hat{e}_1 + h_2 dq_2 \hat{e}_2 + h_3 dq_3 \hat{e}_3, \quad \vec{F} \cdot d\vec{r} = F_1 h_1 dq_1 + F_2 h_2 dq_2 + F_3 h_3 dq_3$$

Sistema	Coordenadas	Factores de escala	$\vec{F} \cdot d\vec{r}$
Polares	(r, θ)	$(1, r)$	$F_r dr + F_\theta r d\theta$
Cilíndricas	(r, θ, z)	$(1, r, 1)$	$F_r dr + F_\theta r d\theta + F_z dz$
Esféricas	(ρ, θ, ϕ) , ϕ medido desde el eje z	$(1, \rho \sin \phi, \rho)$	$F_\rho d\rho + F_\theta \rho \sin \phi d\theta + F_\phi \rho d\phi$

En estos sistemas el campo es conservativo si la expresión de la última columna es una diferencial exacta: $\frac{\partial \varphi}{\partial q_i} = h_i F_i$.

4. $\vec{c}' \times \vec{c}'' = (1, 0, 1) \times (0, 2, 0) = (0 \cdot 0 - 1 \cdot 2, -[1 \cdot 0 - 1 \cdot 0], 1 \cdot 2 - 0) = (-2, 0, 2)$.
5. $\hat{T} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 1)$, $\hat{B} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 0, 1)$ y $\hat{N} = \hat{B} \times \hat{T} = (0, 1, 0)$.
6. Planos por $(0, 0, 0)$: osculador $(\perp \hat{B}) -x + z = 0$; normal $(\perp \hat{T}) x + z = 0$; rectificante $(\perp \hat{N}) y = 0$.

Resultado: $\hat{T} = \frac{(1,0,1)}{\sqrt{2}}$, $\hat{N} = \hat{j}$, $\hat{B} = \frac{(-1,0,1)}{\sqrt{2}}$; osculador $z = x$, normal $x + z = 0$, rectificante $y = 0$. El enunciado original llama «tangente» al plano normal.

Ejercicio 2A.5.7 · Recta parametrizada por longitud de arco

Adaptado de: 2º extraordinario 2024-2, problema 2.

Dada la curva $\vec{r}(t) = (1 + 2t, 5 - 3t, 2 + 4t)$:

- a) parametrize la curva con respecto a la longitud de arco, $\vec{r}(s)$;
- b) calcule el vector tangente unitario utilizando $\vec{r}(s)$;
- c) obtenga el valor de la curvatura.

Resolución.

1. $\vec{r}' = (2, -3, 4)$ y $|\vec{r}'| = \sqrt{4 + 9 + 16} = \sqrt{29}$, constante.
2. $s = \int_0^t \sqrt{29} du = \sqrt{29} t \Rightarrow t = \frac{s}{\sqrt{29}}$.
3. a) $\vec{r}(s) = \left(1 + \frac{2s}{\sqrt{29}}, 5 - \frac{3s}{\sqrt{29}}, 2 + \frac{4s}{\sqrt{29}}\right)$.
4. b) Con s como parámetro, $\hat{T} = \frac{d\vec{r}}{ds} = \frac{1}{\sqrt{29}}(2, -3, 4)$, que ya es unitario.
5. c) $\frac{d\hat{T}}{ds} = \vec{0}$, así que $\kappa = 0$.

Resultado: $\vec{r}(s)$ como arriba, $\hat{T} = \frac{(2,-3,4)}{\sqrt{29}}$ y $\kappa = 0$: la curva es una recta.

Ejercicio 2A.5.8 · Curva dada como intersección

Adaptado de: 3er extraordinario 2024-1, problema 3 (repetido en el 2º final 2024-1, tipo A).

Sea la curva $C : x = z, x^2 + y^2 = 4$. Determine la curvatura en un punto P de C en el que el vector tangente unitario sea paralelo al vector $\vec{v} = \hat{i} + \hat{k}$.

Resolución.

1. Parametriza: $\vec{r}(t) = (2 \cos t, 2 \sin t, 2 \cos t)$.
2. $\vec{r}' = (-2 \sin t, 2 \cos t, -2 \sin t)$. Para que sea paralelo a $(1, 0, 1)$, la componente y debe anularse: $\cos t = 0$, así que $t = \frac{\pi}{2}$ o $t = \frac{3\pi}{2}$, es decir, $P = (0, \pm 2, 0)$.
3. En $t = \frac{\pi}{2}$: $\vec{r}' = (-2, 0, -2)$ y $\vec{r}'' = (-2 \cos t, -2 \sin t, -2 \cos t) = (0, -2, 0)$.
4. $\vec{r}' \times \vec{r}'' = ((0)(0) - (-2)(-2), -[(-2)(0) - (-2)(0)], (-2)(-2) - 0) = (-4, 0, 4)$, con norma $4\sqrt{2}$.
5. $|\vec{r}'| = 2\sqrt{2}$, así que $|\vec{r}'|^3 = 16\sqrt{2}$ y $\kappa = \frac{4\sqrt{2}}{16\sqrt{2}} = \frac{1}{4}$.
6. En $t = \frac{3\pi}{2}$ se obtiene el mismo valor.

Resultado: en $P(0, 2, 0)$ y en $P(0, -2, 0)$, $\kappa = \frac{1}{4}$. La curva es una elipse en el plano $x = z$.

- Cilíndricas $h = (1, r, 1)$, $|J| = r$ · esféricas $h = (1, \rho \sin \phi, \rho)$, $|J| = \rho^2 \sin \phi$.
- $a_u = \vec{a} \cdot \hat{e}_u \cdot F_r = F_x \cos \theta + F_y \sin \theta$, $F_\theta = -F_x \sin \theta + F_y \cos \theta$.
- $\nabla f = \sum \frac{1}{h_i} \frac{\partial f}{\partial q_i} \hat{e}_i$.
- $\nabla \cdot \vec{F} = \frac{1}{h_u h_v h_w} \sum \partial_{q_i} \left(\frac{h_u h_v h_w}{h_i} F_i \right)$ · $\nabla^2 f = \frac{1}{h_u h_v h_w} \sum \partial_{q_i} \left(\frac{h_u h_v h_w}{h_i^2} \partial_{q_i} f \right)$.
- $\nabla \times \vec{F} = \frac{1}{h_u h_v h_w} \det \begin{pmatrix} h_u \hat{e}_u & h_v \hat{e}_v & h_w \hat{e}_w \\ \partial_u & \partial_v & \partial_w \\ h_u F_u & h_v F_v & h_w F_w \end{pmatrix}$, con (u, v, w) dextrógiro (esféricas: (ρ, ϕ, θ)).
- Solenoidal: $\nabla \cdot \vec{F} = 0$ · irrotacional: $\nabla \times \vec{F} = \vec{0}$ · armónica: $\nabla^2 f = 0$.
- $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$.

2B.9 Procedimiento recomendado en el examen

1. Escribe arriba «forma directa» o «forma inversa», según lo que se haya dado.
2. Deriva y arma los dos o tres vectores (o gradientes).
3. Productos punto: «el sistema **es** (o **no es**) ortogonal», con la frase completa.
4. h con raíz (y «uno entre» en la forma inversa ortogonal), luego $\hat{e}$.
5. Determinante, inversión si hace falta y comprobación $|J| = h_u h_v$.
6. Para un operador: los h , la fórmula general escrita y después la sustitución.
7. Resultado exacto y recuadrado.

Si no se encuentra el camino, escribe qué forma se dio, los vectores derivados, el producto punto planteado, h con números y la matriz del jacobiano, aunque el determinante quede sin terminar. El planteamiento correcto también cuenta.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 91.

Ejercicio propuesto 2A.6.2

Adaptado de: 1er final 2024-2, problema 2.

Sea la curva $C : \vec{r}(t) = e^{2t} \hat{i} + \cos 2t \hat{j} + 4 \hat{k}$. Determine la curvatura en el punto $P(e^{2\pi}, 1, 4)$.

Resultado: $\kappa = e^{-4\pi}$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 91.

Ejercicio propuesto 2A.6.3

Adaptado de: 2º final 2025-1, tipo A, problema 2.

Sea la curva $\vec{r}(t) = (1 - \sqrt{8} \cos t) \hat{i} + (1 - \sqrt{8} \cos t) \hat{j} + 4 \sin t \hat{k}$. Determine en el punto $P(1, 1, 4)$: a) el vector tangente unitario; b) la curvatura y el radio de curvatura; c) la ecuación cartesiana del plano osculador.

Resultado: $\hat{T} = \frac{(1, 1, 0)}{\sqrt{2}}$; $\kappa = \frac{1}{4}$; $\rho = 4$; plano osculador $x - y = 0$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 92.

Ejercicio propuesto 2A.6.4

Adaptado de: 2º final 2025-2, tipo A, problema 2.

Sea la curva $\vec{r}(t) = \cos t \hat{i} + \sin t \hat{j} + (\cos t + \sin t + 1) \hat{k}$. Determine, para el punto $P(1, 0, 2)$: a) los vectores $\hat{T}$, $\hat{N}$ y $\hat{B}$; b) una ecuación cartesiana del plano normal.

Resultado: $\hat{T} = \frac{(0, 1, 1)}{\sqrt{2}}$, $\hat{N} = \frac{(-2, 1, -1)}{\sqrt{6}}$, $\hat{B} = \frac{(-1, -1, 1)}{\sqrt{3}}$; plano normal $y + z = 2$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 92.

Ejercicio propuesto 2A.6.5

Adaptado de: 1er final 2025-2, tipo A, problema 2.

Sea la curva $\vec{r}(s) = 3 \sin \frac{s}{\sqrt{10}} \hat{i} + \frac{s}{\sqrt{10}} \hat{j} + 3 \cos \frac{s}{\sqrt{10}} \hat{k}$, donde s es la longitud de arco.

Determine para el punto $A(0, 0, 3)$: a) los vectores $\hat{T}$, $\hat{N}$ y $\hat{B}$; b) la curvatura y la torsión.

Resultado: $\hat{T} = \frac{(3, 1, 0)}{\sqrt{10}}$, $\hat{N} = -\hat{k}$, $\hat{B} = \frac{(-1, 3, 0)}{\sqrt{10}}$; $\kappa = \frac{3}{10}$, $\tau = \frac{1}{10}$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 92.

Ejercicio propuesto 2A.6.6

Adaptado de: 1er final 2024-1, tipo A, problema 2.

Al despegar, un avión se desplaza a lo largo de la trayectoria $\vec{r}(t) = (4 - 3t^2) \hat{i} + 5 \hat{j} + 4t^2 \hat{k}$. Determine la posición del avión en el instante en que ha recorrido 40 unidades de longitud desde el punto $A(1, 5, 4)$.

Resultado: $(-23, 5, 36)$, que corresponde a $t = 3$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 92.

Resultado: no es ortogonal; $J = \frac{1}{4}$; $x = \frac{u+v}{2}$, $y = \frac{v-u}{4}$; $h_u = h_v = \frac{\sqrt{5}}{4}$; $\hat{e}_u = \frac{(2,-1)}{\sqrt{5}}$, $\hat{e}_v = \frac{(2,1)}{\sqrt{5}}$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 93.

Ejercicio propuesto 2B.6.2

Adaptado de: 1er final 2024-2, problema 3.

Sea el sistema $u = x - 4y + z$, $v = x - z$, $w = 2x + y + 2z$. a) Determine si es ortogonal. b) Obtenga $\hat{e}_u, \hat{e}_v, \hat{e}_w$. c) Transforme el vector $\vec{u} = 2\hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k}$ a la base $\{\hat{e}_u, \hat{e}_v, \hat{e}_w\}$.

Resultado: ortogonal; $\hat{e}_u = \frac{(1,-4,1)}{3\sqrt{2}}$, $\hat{e}_v = \frac{(1,0,-1)}{\sqrt{2}}$, $\hat{e}_w = \frac{(2,1,2)}{3}$; $\vec{u} = 3\hat{e}_w$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 94.

Ejercicio propuesto 2B.6.3

Adaptado de: 2º final 2024-2, tipo A, problema 3.

Sea la transformación $x = \frac{u+v}{2}$, $y = \frac{u-v}{2}$ y sea la función $f(u, v) = \sqrt{2}u^4v^3$. Calcule el gradiente de f .

Resultado: $h_u = h_v = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $\nabla f = 8u^3v^3\hat{e}_u + 6u^4v^2\hat{e}_v$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 94.

Ejercicio propuesto 2B.6.4

Adaptado de: 1er extraordinario 2018-1, tipo A, problema 3.

Calcule la divergencia del campo $\vec{F}(x, y, z) = (x^2 + y^2)(x\hat{i} + y\hat{j}) + z\hat{k}$ en coordenadas cilíndricas (ρ, θ, z) .

Resultado: $F_\rho = \rho^3$, $F_\theta = 0$, $F_z = z$; $\nabla \cdot \vec{F} = 4\rho^2 + 1$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 94.

Ejercicio propuesto 2B.6.5

Adaptado de: 1er extraordinario 2025-2, problema 3.

Sea la transformación $x = u \cos \theta$, $y = v \sin \theta$, $z = u^2 + v^2$. Determine: a) el vector base $\vec{e}_\theta$;

b) el factor de escala h_v ; c) el jacobiano $J\left(\frac{x,y,z}{u,v,\theta}\right)$.

Resultado: $\vec{e}_\theta = (-u \sin \theta, v \cos \theta, 0)$; $h_v = \sqrt{\sin^2 \theta + 4v^2}$; $J = 2u^2 \sin^2 \theta - 2v^2 \cos^2 \theta$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 94.

Ejercicio propuesto 2B.6.6

Adaptado de: 2º final 2025-2, tipo A, problema 3.

Determine si el campo, expresado en coordenadas cilíndricas, $\vec{F}(r, \theta, z) = (r^2z + \frac{r}{2} \sin \theta)\hat{e}_r + (r \cos \theta)\hat{e}_\theta - \frac{3}{2}rz^2\hat{e}_z$ es solenoidal.

Resultado: $\nabla \cdot \vec{F} = 0$: sí es solenoidal.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 94.

9. **Derivadas hiperbólicas.** $(\cosh t)' = +\sinh t$, pero $(\cosh t)' = -\sinh t$.

10. **Ángulo entre curva y superficie.** Se usa el seno. Si el producto punto es cero, el ángulo es 0 (curva tangente), no 90° .

2A.8 Formulario de emergencia de la unidad

- $\hat{T} = \frac{\vec{r}'}{|\vec{r}'|} \cdot \hat{B} = \frac{\vec{r}' \times \vec{r}''}{|\vec{r}' \times \vec{r}''|} \cdot \hat{N} = \hat{B} \times \hat{T}$.
 - $\kappa = \frac{|\vec{r}' \times \vec{r}''|}{|\vec{r}'|^3} \cdot \rho = \frac{1}{\kappa} \cdot \text{centro de curvatura } P + \rho \hat{N} \cdot \tau = \frac{(\vec{r}' \times \vec{r}'') \cdot \vec{r}'''}{|\vec{r}' \times \vec{r}''|^2}$, con signo.
 - Frenet-Serret: $\hat{T}' = \kappa \hat{N}$, $\hat{N}' = -\kappa \hat{T} + \tau \hat{B}$, $\hat{B}' = -\tau \hat{N}$ (derivadas respecto a s).
 - $a_T = \frac{\vec{v} \cdot \vec{a}}{|\vec{v}|} \cdot a_N = \frac{|\vec{v} \times \vec{a}|}{|\vec{v}|} = \kappa |\vec{v}|^2 \cdot \vec{a}_N = \vec{a} - a_T \hat{T}$.
 - Planos: osculador $\perp \hat{B}$ · normal $\perp \hat{T}$ · rectificante $\perp \hat{N}$.
 - $s = \int |\vec{r}'| dt$; con s como parámetro, $\hat{T} = d\vec{r}/ds$.
 - Superficie: $\vec{N} = \vec{R}_p \times \vec{R}_m$ o $\nabla F \cdot \text{tangencia } \vec{r}' \cdot \vec{N} = 0$ · ángulo $\sin \alpha = \frac{|\vec{r}' \cdot \vec{N}|}{|\vec{r}'| |\vec{N}|}$.
- intersección: dirección $\vec{N}_1 \times \vec{N}_2$.
- Recta: $\kappa = 0$ · curva plana: $\tau = 0$.

2A.9 Procedimiento recomendado en el examen

1. Encuentra t_0 y escribe la comprobación de las tres coordenadas.
2. Deriva con t y anota $\vec{r}'(t_0)$, $\vec{r}''(t_0)$ y, si hay torsión, $\vec{r}'''(t_0)$.
3. Calcula $|\vec{r}'|$ y $\vec{r}' \times \vec{r}''$; comprueba el producto cruz con dos productos punto iguales a cero.
4. Escribe cada fórmula antes de sustituir: κ (cubo), τ (cuadrado, con signo), a_T , a_N .
5. Da $\hat{T}$, $\hat{N}$, $\hat{B}$ como vectores unitarios, con $\hat{N} = \hat{B} \times \hat{T}$.
6. Para un plano, vector normal correcto y punto de la curva. Resultado exacto y recuadrado.

Si no se encuentra el camino, escribe t_0 con su comprobación, $\vec{r}'(t_0)$ y $\vec{r}''(t_0)$, $\hat{T}$ con números, el determinante de $\vec{r}' \times \vec{r}''$ planteado y la fórmula de κ sustituida. El planteamiento correcto también cuenta.

- c) el rotacional del campo $\vec{F} = w\hat{e}_u + u\hat{e}_v + v\hat{e}_w$ expresado en el sistema UVW .

Resolución.

1. Forma directa y lineal: los vectores base son las columnas de coeficientes, $\vec{r}_u = (2, -2, 1)$, $\vec{r}_v = (2, 1, -2)$, $\vec{r}_w = (1, 2, 2)$.
2. a) $\vec{r}_u \cdot \vec{r}_v = 4 - 2 - 2 = 0$, $\vec{r}_u \cdot \vec{r}_w = 2 - 4 + 2 = 0$, $\vec{r}_v \cdot \vec{r}_w = 2 + 2 - 4 = 0$: **ortogonal**.
3. b) $h_u = h_v = h_w = \sqrt{4 + 4 + 1} = 3$. Comprobación: $J = 27 = 3^3$.
4. c) $\nabla \times \vec{F} = \frac{1}{27} \begin{vmatrix} 3\hat{e}_u & 3\hat{e}_v & 3\hat{e}_w \\ \partial_u & \partial_v & \partial_w \\ 3w & 3u & 3v \end{vmatrix}$.
5. Componente $\hat{e}_u$: $\frac{3}{27} [\partial_v(3v) - \partial_w(3u)] = \frac{3-3}{27} = \frac{1}{3}$.
6. Componente $\hat{e}_v$: $-\frac{3}{27} [\partial_u(3v) - \partial_w(3w)] = -\frac{3}{27}(0 - 3) = \frac{1}{3}$.
7. Componente $\hat{e}_w$: $\frac{3}{27} [\partial_u(3u) - \partial_v(3w)] = \frac{1}{3}$.

Resultado: ortogonal; $h_u = h_v = h_w = 3$; $\nabla \times \vec{F} = \frac{1}{3}(\hat{e}_u + \hat{e}_v + \hat{e}_w)$.

Ejercicio 2B.5.8 · Divergencia y rotacional en cilíndricas

Adaptado de: 2º extraordinario 2024-2, problema 3.

Sea $\vec{F}(x, y, z) = xz\hat{i} + yz\hat{j} + xy\hat{k}$. Obtenga su divergencia y su rotacional en coordenadas cilíndricas.

Resolución.

1. Componentes cilíndricas: $F_r = xz \cos \theta + yz \sin \theta = rz$; $F_\theta = -xz \sin \theta + yz \cos \theta = 0$; $F_z = xy = r^2 \sin \theta \cos \theta = \frac{1}{2}r^2 \sin 2\theta$.
2. Divergencia: $\frac{1}{r} \frac{\partial(r^2 z)}{\partial r} + 0 + 0 = \frac{2rz}{r} = 2z$.
3. Rotacional, componente $\hat{e}_r$: $\frac{1}{r} \frac{\partial F_z}{\partial \theta} - \frac{\partial F_\theta}{\partial z} = \frac{1}{r} r^2 \cos 2\theta = r \cos 2\theta$.
4. Componente $\hat{e}_\theta$: $\frac{\partial F_r}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial r} = r - r \sin 2\theta$.
5. Componente $\hat{e}_z$: $\frac{1}{r} \left[\frac{\partial(r F_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial F_r}{\partial \theta} \right] = 0$.
6. Comprobación en cartesianas: $\nabla \cdot \vec{F} = z + z + 0 = 2z$ y $\nabla \times \vec{F} = (x - y, x - y, 0)$, cuyas componentes cilíndricas son $(x - y)(\cos \theta + \sin \theta) = r \cos 2\theta$ y $(x - y)(\cos \theta - \sin \theta) = r(1 - \sin 2\theta)$.

Resultado: $\nabla \cdot \vec{F} = 2z$ y $\nabla \times \vec{F} = r \cos 2\theta \hat{e}_r + r(1 - \sin 2\theta) \hat{e}_\theta$.

Ejercicio 2B.5.9 · Laplaciano en un sistema curvilíneo

Adaptado de: 1er final 2017-1, tipo A, problema 3.

Sea el sistema coordenado curvilíneo ortogonal definido por $x = u^2 + v^2$, $y = u^2 - v^2$, $z = w$. Utilice este sistema para calcular el laplaciano de la función escalar $f(u, v) = u^4 + v^4$.

Resolución.

1. $\vec{r}_u = (2u, 2u, 0)$, $\vec{r}_v = (2v, -2v, 0)$, $\vec{r}_w = (0, 0, 1)$; los productos punto son cero.
2. Con $u, v > 0$: $h_u = 2\sqrt{2}u$, $h_v = 2\sqrt{2}v$, $h_w = 1$, y $h_u h_v h_w = 8uv$.
3. $\frac{h_v h_w}{h_u} \frac{\partial f}{\partial u} = \frac{v}{u} \cdot 4u^3 = 4u^2 v$ y $\frac{h_u h_w}{h_v} \frac{\partial f}{\partial v} = \frac{u}{v} \cdot 4v^3 = 4uv^2$.

Jacobiano.

$$J\left(\frac{x, y}{u, v}\right) = \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix}, \quad J\left(\frac{x, y, z}{u, v, w}\right) = \det[\vec{r}_u \ \vec{r}_v \ \vec{r}_w]$$

- **Recíproco:** $J\left(\frac{u, v}{x, y}\right) = \frac{1}{J\left(\frac{x, y}{u, v}\right)}$. Por eso nunca hace falta despejar: se deriva lo que se tiene y, si se pide el otro, se invierte.
- **Existencia de la inversa:** donde $J \neq 0$ la transformación tiene inversa local. Los puntos donde $J = 0$ son **puntos singulares** (en polares, el origen $r = 0$).
- **Signo:** intercambiar el orden de dos variables cambia el signo de J . En áreas y volúmenes se usa $|J|$: $dA_{xy} = \left| J\left(\frac{x, y}{u, v}\right) \right| du dv$.
- **Comprobación:** en un sistema ortogonal, $|J| = h_u h_v h_w$.

Sistemas usuales.

Sistema	Transformación	Factores de escala	$ J $
Polares (r, θ)	$x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$	$h_r = 1$, $h_\theta = r$	r
Cilíndricas (r, θ, z)	las de polares y $z = z$	$h_r = 1$, $h_\theta = r$, $h_z = 1$	r
Esféricas (ρ, θ, ϕ)	$x = \rho \sin \phi \cos \theta$, $y = \rho \sin \phi \sin \theta$, $z = \rho \cos \phi$	$h_\rho = 1$, $h_\theta = \rho \sin \phi$, $h_\phi = \rho$	$\rho^2 \sin \phi$

En esféricas, ϕ es el ángulo medido desde el eje z positivo. En cilíndricas, $\hat{e}_r = (\cos \theta, \sin \theta, 0)$, $\hat{e}_\theta = (-\sin \theta, \cos \theta, 0)$, $\hat{e}_z = \hat{k}$, de donde

$$F_r = F_x \cos \theta + F_y \sin \theta, \quad F_\theta = -F_x \sin \theta + F_y \cos \theta, \quad F_z = F_z$$

Componentes de un vector en la base curvilínea. Si el sistema es ortogonal, $\vec{a} = a_u \hat{e}_u + a_v \hat{e}_v + a_w \hat{e}_w$ con $a_u = \vec{a} \cdot \hat{e}_u$, $a_v = \vec{a} \cdot \hat{e}_v$, $a_w = \vec{a} \cdot \hat{e}_w$. En particular, $\hat{i} = (\hat{i} \cdot \hat{e}_u) \hat{e}_u + (\hat{i} \cdot \hat{e}_v) \hat{e}_v + (\hat{i} \cdot \hat{e}_w) \hat{e}_w$: los coeficientes son las primeras componentes de cada $\hat{e}$.

Operadores en coordenadas curvilíneas ortogonales. Con $\vec{F} = F_u \hat{e}_u + F_v \hat{e}_v + F_w \hat{e}_w$:

$$\nabla f = \frac{1}{h_u} \frac{\partial f}{\partial u} \hat{e}_u + \frac{1}{h_v} \frac{\partial f}{\partial v} \hat{e}_v + \frac{1}{h_w} \frac{\partial f}{\partial w} \hat{e}_w$$

$$\nabla \cdot \vec{F} = \frac{1}{h_u h_v h_w} \left[\frac{\partial(h_v h_w F_u)}{\partial u} + \frac{\partial(h_u h_w F_v)}{\partial v} + \frac{\partial(h_u h_v F_w)}{\partial w} \right]$$

$$\nabla \times \vec{F} = \frac{1}{h_u h_v h_w} \begin{vmatrix} h_u \hat{e}_u & h_v \hat{e}_v & h_w \hat{e}_w \\ \partial_u & \partial_v & \partial_w \\ h_u F_u & h_v F_v & h_w F_w \end{vmatrix}$$

$$\nabla^2 f = \frac{1}{h_u h_v h_w} \left[\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{h_v h_w}{h_u} \frac{\partial f}{\partial u} \right) + \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{h_u h_w}{h_v} \frac{\partial f}{\partial v} \right) + \frac{\partial}{\partial w} \left(\frac{h_u h_v}{h_w} \frac{\partial f}{\partial w} \right) \right]$$

Orden de las coordenadas en el rotacional. La fórmula del determinante supone que el orden (u, v, w) es dextrógiro, es decir, que el jacobiano $\partial(x, y, z)/\partial(u, v, w)$ es positivo.

Ejercicio 2B.5.3 · Forma directa y transformación de un vector

Adaptado de: 2º extraordinario 2025-2, problema 3.

Sean las ecuaciones de transformación $x = u^2 - v^2$, $y = 2uv$.

- a) Demuestre que el sistema es ortogonal.
- b) Calcule los jacobianos $J\left(\frac{x,y}{u,v}\right)$ y $J\left(\frac{u,v}{x,y}\right)$.
- c) Transforme el vector $\vec{a} = 2\hat{j}$ a coordenadas curvilíneas (u, v) , con $u > 0$ y $v > 0$.

Resolución.

1. Forma directa: $\vec{r}_u = (2u, 2v)$ y $\vec{r}_v = (-2v, 2u)$.
2. a) $\vec{r}_u \cdot \vec{r}_v = -4uv + 4uv = 0$: **ortogonal**.
3. $h_u = h_v = \sqrt{4u^2 + 4v^2} = 2\sqrt{u^2 + v^2}$.
4. b) $J\left(\frac{x,y}{u,v}\right) = \begin{vmatrix} 2u & -2v \\ 2v & 2u \end{vmatrix} = 4(u^2 + v^2)$, que coincide con $h_u h_v$; $J\left(\frac{u,v}{x,y}\right) = \frac{1}{4(u^2 + v^2)}$.
5. c) $\hat{e}_u = \frac{(u, v)}{\sqrt{u^2 + v^2}}$ y $\hat{e}_v = \frac{(-v, u)}{\sqrt{u^2 + v^2}}$.
6. $a_u = (0, 2) \cdot \hat{e}_u = \frac{2v}{\sqrt{u^2 + v^2}}$ y $a_v = (0, 2) \cdot \hat{e}_v = \frac{2u}{\sqrt{u^2 + v^2}}$.

Resultado: $J\left(\frac{x,y}{u,v}\right) = 4(u^2 + v^2)$, $J\left(\frac{u,v}{x,y}\right) = \frac{1}{4(u^2 + v^2)}$ y $\vec{a} = \frac{2v\hat{e}_u + 2u\hat{e}_v}{\sqrt{u^2 + v^2}}$.

Ejercicio 2B.5.4 · Forma inversa no lineal

Adaptado de: 1er extraordinario 2026-1, problema 2.

Sea el sistema curvilíneo $u = x^2 - y^2$, $v = 2xy$. Determine:

- a) si el sistema es ortogonal;
- b) los factores de escala h_u, h_v ;
- c) los vectores $\hat{e}_u, \hat{e}_v$;
- d) el jacobiano $J\left(\frac{x,y}{u,v}\right)$.

Resolución.

1. Forma inversa: $\nabla u = (2x, -2y)$ y $\nabla v = (2y, 2x)$.
2. a) $\nabla u \cdot \nabla v = 4xy - 4xy = 0$: **ortogonal**.
3. $|\nabla u| = |\nabla v| = 2\sqrt{x^2 + y^2}$.
4. b) $h_u = h_v = \frac{1}{2\sqrt{x^2 + y^2}}$.
5. c) $\hat{e}_u = \frac{(x, -y)}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ y $\hat{e}_v = \frac{(y, x)}{\sqrt{x^2 + y^2}}$.
6. d) $J\left(\frac{u,v}{x,y}\right) = \begin{vmatrix} 2x & -2y \\ 2y & 2x \end{vmatrix} = 4(x^2 + y^2)$, de donde $J\left(\frac{x,y}{u,v}\right) = \frac{1}{4(x^2 + y^2)}$.
7. En u, v : $u^2 + v^2 = (x^2 - y^2)^2 + 4x^2y^2 = (x^2 + y^2)^2$, así que $J\left(\frac{x,y}{u,v}\right) = \frac{1}{4\sqrt{u^2 + v^2}}$.

Comprobación: $h_u h_v = \frac{1}{4(x^2 + y^2)}$.

Si el enunciado dice...	Se trata de...	Procedimiento
«laplaciano», «función armónica»	laplaciano	2B.3.7

2B.3 Procedimientos2B.3.1 Forma directa: dan $x(u, v, w)$

1. Deriva cada componente: $\vec{r}_u = (x_u, y_u, z_u)$, $\vec{r}_v$, $\vec{r}_w$. Si la transformación es lineal, los vectores son las **columnas** de coeficientes.
2. Ortogonalidad: los tres productos punto. Si hay un parámetro, iguala a cero y despeja.
3. $h_u = |\vec{r}_u|$, **con raíz**.
4. $\hat{e}_u = \frac{\vec{r}_u}{h_u}$.
5. $J\left(\frac{x,y,z}{u,v,w}\right) = \det[\vec{r}_u \vec{r}_v \vec{r}_w]$. Si piden el otro, inviértelo.
6. Comprueba: $|J| = h_u h_v h_w$ si es ortogonal.

2B.3.2 Forma inversa: dan $u(x, y)$

1. Gradientes: $\nabla u = (u_x, u_y)$ y $\nabla v = (v_x, v_y)$.
2. Ortogonalidad: $\nabla u \cdot \nabla v = 0$.
3. Si es ortogonal: $h_u = \frac{1}{|\nabla u|}$ (**uno entre**, con raíz) y $\hat{e}_u = \frac{\nabla u}{|\nabla u|}$.
4. $J\left(\frac{u,v}{x,y}\right) = \begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix}$, y el que casi siempre se pide es $J\left(\frac{x,y}{u,v}\right) = \frac{1}{J\left(\frac{u,v}{x,y}\right)}$.
5. Si piden el resultado en u, v , busca una identidad: por ejemplo, $u^2 + v^2 = (x^2 + y^2)^2$.
6. Área de la imagen: $A_{uv} = \left| J\left(\frac{u,v}{x,y}\right) \right| A_{xy}$ cuando el jacobiano es constante.

2B.3.3 Sistema no ortogonal

1. Escribe el producto punto distinto de cero y concluye «el sistema **no** es ortogonal».
2. El jacobiano se calcula igual.
3. Si piden h o $\hat{e}$: despeja la transformación inversa, arma $\vec{r}(u, v)$ y usa $h_u = |\vec{r}_u|$ y $\hat{e}_u = \vec{r}_u/h_u$. La fórmula $h_u = 1/|\nabla u|$ **no** vale aquí.
4. No se proyectan vectores con productos punto: la base no es ortogonal.

2B.3.4 Expresar un vector en la base curvilínea

1. Demuestra primero que el sistema es ortogonal.
2. Calcula $\hat{e}_u, \hat{e}_v, \hat{e}_w$.
3. $a_u = \vec{a} \cdot \hat{e}_u$, $a_v = \vec{a} \cdot \hat{e}_v$, $a_w = \vec{a} \cdot \hat{e}_w$, y escribe $\vec{a} = a_u \hat{e}_u + a_v \hat{e}_v + a_w \hat{e}_w$.
4. Para $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$: sus coeficientes son las componentes x, y y z de cada $\hat{e}$.

2B.3.5 Gradiente

1. Calcula h_u, h_v, h_w .
2. Deriva f respecto a cada coordenada curvilínea.
3. Divide cada derivada entre **su** factor de escala y multiplica por su $\hat{e}$.

- a) la curvatura y la torsión de la curva;
- b) los vectores aceleración tangencial y aceleración normal.

Resolución.

1. $2e^t = 2 \Rightarrow t_0 = 0$. Comprobación: $\cos 0 = 1$ y $0 + 3 = 3$.
2. $\vec{r}' = (2e^t, -\operatorname{sen} t, 3t^2) \Rightarrow (2, 0, 0)$; $\vec{r}'' = (2e^t, -\operatorname{cost}, 6t) \Rightarrow (2, -1, 0)$; $\vec{r}''' = (2e^t, \operatorname{sen} t, 6) \Rightarrow (2, 0, 6)$.
3. $\vec{r}' \times \vec{r}'' = (2, 0, 0) \times (2, -1, 0) = (0, 0, (2)(-1) - (0)(2)) = (0, 0, -2)$, con norma 2; $|\vec{r}'| = 2$.
4. a) $\kappa = \frac{2}{2^3} = \frac{1}{4}$ y $\tau = \frac{(0, 0, -2) \cdot (2, 0, 6)}{2^2} = \frac{-12}{4} = -3$.
5. b) $a_T = \frac{(2, 0, 0) \cdot (2, -1, 0)}{2} = 2$, así que $\vec{a}_T = 2\hat{T} = (2, 0, 0)$.
6. $\vec{a}_N = \vec{a} - \vec{a}_T = (2, -1, 0) - (2, 0, 0) = (0, -1, 0)$. Comprobación: $|\vec{a}_N| = \frac{2}{2} = 1$.

Resultado: $\kappa = \frac{1}{4}$, $\tau = -3$; $\vec{a}_T = 2\hat{i}$ y $\vec{a}_N = -\hat{j}$. La torsión es negativa y así se escribe.

Ejercicio 2A.5.5 · Curvatura y plano osculador

Adaptado de: 1er extraordinario 2025-2, problema 2.

Sea la curva $\vec{r}(t) = t\hat{i} + \ln(t^2)\hat{j} + \frac{1}{2t}\hat{k}$. Determine en el punto $P(1, 0, \frac{1}{2})$:

- a) la curvatura;
- b) la ecuación cartesiana del plano osculador.

Resolución.

1. $x = t = 1 \Rightarrow t_0 = 1$. Comprobación: $\ln 1 = 0$ y $\frac{1}{2}$.
2. $\vec{r}' = (1, \frac{2}{t}, -\frac{1}{2t^2}) \Rightarrow (1, 2, -\frac{1}{2})$; $\vec{r}'' = (0, -\frac{2}{t^2}, \frac{1}{t^3}) \Rightarrow (0, -2, 1)$.
3. $\vec{r}' \times \vec{r}'' = (2 \cdot 1 - (-\frac{1}{2})(-2), -[1 \cdot 1 - 0], 1 \cdot (-2) - 0) = (1, -1, -2)$, con norma $\sqrt{6}$.
4. $|\vec{r}'| = \sqrt{1 + 4 + \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{21}}{2}$, así que $|\vec{r}'|^3 = \frac{21\sqrt{21}}{8}$.
5. a) $\kappa = \frac{8\sqrt{6}}{21\sqrt{21}} = \frac{8}{21}\sqrt{\frac{2}{7}} = \frac{8\sqrt{14}}{147} \approx 0.204$.
6. b) Normal $(1, -1, -2)$ por P : $(x - 1) - (y - 0) - 2(z - \frac{1}{2}) = 0$.

Resultado: $\kappa = \frac{8\sqrt{14}}{147}$; plano osculador $x - y - 2z = 0$.

Ejercicio 2A.5.6 · Triedro y planos en el origen

Adaptado de: 1er extraordinario 2024-1, problema 2.

Sea la curva $\vec{c}(\theta) = \theta \cos \theta \hat{i} + \theta \operatorname{sen} \theta \hat{j} + \operatorname{sen} \theta \hat{k}$. Determine, en el origen de coordenadas, los vectores del triedro móvil $\hat{T}, \hat{N}, \hat{B}$ y las ecuaciones cartesianas de los planos osculador, normal y rectificante.

Resolución.

1. En el origen, $\theta_0 = 0$.
2. $\vec{c}' = (\cos \theta - \theta \operatorname{sen} \theta, \operatorname{sen} \theta + \theta \cos \theta, \cos \theta) \Rightarrow (1, 0, 1)$.
3. $\vec{c}'' = (-2 \operatorname{sen} \theta - \theta \cos \theta, 2 \cos \theta - \theta \operatorname{sen} \theta, -\operatorname{sen} \theta) \Rightarrow (0, 2, 0)$.

Parametrizaciones que se usan.

Curva	$\vec{r}(t)$	Intervalo
Segmento de A a B	$A + t(B - A)$	$0 \leq t \leq 1$
Circunferencia de radio R y centro (x_0, y_0) , sentido antihorario	$(x_0 + R \cos t, y_0 + R \operatorname{sen} t)$	$0 \leq t \leq 2\pi$
Elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$	$(a \cos t, b \operatorname{sen} t)$	según el tramo
Hélice	$(R \cos t, R \operatorname{sen} t, ct)$	el que se indique
Gráfica $y = g(x)$	$(t, g(t))$	de x_A a x_B
Gráfica $x = g(y)$	$(g(t), t)$	de y_A a y_B

Trabajo contra la gravedad. Para subir un cuerpo de peso w hay que aplicar $\vec{F} = w\hat{k}$, que es conservativo con $\varphi = wz$. Por eso $W = w\Delta z$, sin importar la forma del camino.

3.2 Cómo reconocer el problema

Si el enunciado dice...	Se trata de...	Procedimiento
$\int_C f ds$, «campo escalar», «masa de un alambre»	integral de línea de un campo escalar	3.3.1
«trabajo», $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$, $\int_C P dx + Q dy$, «circulación»	integral de un campo vectorial: primero el rotacional	3.3.3
«independiente de la trayectoria», «función potencial», «diferencial exacta»	campo conservativo	3.3.3 y 3.3.4
«determine a, b, c para que sea conservativo (o irrotacional) y solenoidal»	constantes de un campo	3.3.5
campo con $\hat{e}_r, \hat{e}_\theta, \hat{e}_z$ o $\hat{e}_\rho, \hat{e}_\theta, \hat{e}_\phi$	trabajo en coordenadas curvilíneas	3.3.6
«trayectoria cerrada», «una vuelta», $\oint_C$	curva cerrada	3.3.7
«peso», «sube», «contra la gravedad»	trabajo contra la gravedad	$W = w\Delta z$
campo no conservativo sobre segmentos, elipses o gráficas	parametrización directa	3.3.2

3.3 Procedimientos

3.3.1 Integral de línea de un campo escalar

1. Parametriza la curva: $\vec{r}(t)$ y los límites de t (véase la tabla de 3.1).

Ejercicio 2A.5.9 · Curva tangente a una superficie

Adaptado de: 1er extraordinario 2024-2, problema 2 (repetido en el 1er extraordinario 2025-1).

Demuestre que la curva $C : \vec{r}(t) = \left(\frac{t^3}{4} - 2, \frac{4}{t} - 3, \cos(t-2) \right)$ es tangente a la superficie $S : x^3 + y^3 + z^3 - xyz = 0$ en el punto $Q(0, -1, 1)$.

Resolución.

1. $\cos(t-2) = 1$ y $\frac{t^3}{4} - 2 = 0$ dan $t_0 = 2$. Comprobación: $\frac{4}{2} - 3 = -1$. El punto está en la curva.
2. $F(Q) = 0 + (-1) + 1 - 0 = 0$: el punto está en la superficie.
3. $\vec{r}' = \left(\frac{3t^2}{4}, -\frac{4}{t^2}, -\sin(t-2) \right) \Rightarrow \vec{r}'(2) = (3, -1, 0)$.
4. $\nabla F = (3x^2 - yz, 3y^2 - xz, 3z^2 - xy) \Rightarrow \nabla F(Q) = (1, 3, 3)$.
5. $\vec{r}'(2) \cdot \nabla F(Q) = 3 - 3 + 0 = 0$.

Resultado: la tangente a la curva es perpendicular a la normal de la superficie en un punto común: **la curva es tangente a S en Q.**

Ejercicio 2A.5.10 · Ángulo entre una curva y una superficie

Adaptado de: 2º extraordinario 2025-1, problema 2.

Sean la superficie $S : \vec{R}(p, m) = (m+p)\hat{i} + (m-p)\hat{j} + 4mp\hat{k}$ y la recta $C : x = t-2, y = -t-2, z = -8t$. Calcule el ángulo de intersección entre S y C en el punto P que corresponde a $p = 1$.

Resolución.

1. Con $p = 1: m+1 = t-2$ y $m-1 = -t-2$. Sumando, $2m = -4$, así que $m = -2$ y $t = 1$. Comprobación en z : $4(-2)(1) = -8 = -8(1)$. El punto es $P(-1, -3, -8)$.
2. $\vec{R}_p = (1, -1, 4m) = (1, -1, -8)$ y $\vec{R}_m = (1, 1, 4p) = (1, 1, 4)$.
3. $\vec{N} = \vec{R}_p \times \vec{R}_m = ((-1)(4) - (-8)(1), -[(1)(4) - (-8)(1)], (1)(1) - (-1)(1)) = (4, -12, 2)$.
4. $\vec{r}' = (1, -1, -8)$ y $\vec{r}' \cdot \vec{N} = 4 + 12 - 16 = 0$.
5. $\sin \alpha = 0 \Rightarrow \alpha = 0$.

Resultado: $\alpha = 0$. La recta es tangente a S ; de hecho está contenida en ella, porque S es $z = x^2 - y^2$ y $(t-2)^2 - (t+2)^2 = -8t$.

2A.6 Ejercicios propuestos

Resuélvelos sin ver la solución. Las resoluciones completas están en el **Apéndice E, sección E.2A.**

Ejercicio propuesto 2A.6.1

Adaptado de: 2º final 2024-2, tipo A, problema 2.

Una partícula se desplaza a lo largo de la trayectoria $C : x = t^2, y = -t, z = -t^2$, donde t es el tiempo. Calcule los vectores aceleración tangencial y aceleración normal en el punto $P(1, -1, -1)$.

Resultado: $\vec{a}_T = \frac{1}{9}(16, -8, -16)$ y $\vec{a}_N = \frac{1}{9}(2, 8, -2)$.

Unidad 3 · Integrales de línea: trabajo, campo conservativo y función potencial

Objetivo (programa de la asignatura). El alumno calculará integrales de línea de funciones vectoriales y las aplicará en la resolución de problemas físicos y geométricos.

Instrucciones de emergencia

- **Frecuencia:** aparece en los 35 exámenes revisados, de 2016 a 2026. Casi siempre es el problema 4 y vale de 15 a 20 puntos; en varios extraordinarios sale además un problema aparte de «conservativo y solenoidal».
- **Tiempo:** de 2 a 3 horas para esta unidad.
- **Ruta corta:**
 1. Lee la sección 3.1 (20 min).
 2. Sigue el ejemplo 3.4 tapando la resolución.
 3. Resuelve los ejercicios 3.5 con cronómetro (15 min cada uno).

3.1 Conceptos y expresiones

Curva parametrizada. Una curva C se describe con una función vectorial $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$, $a \leq t \leq b$. El **sentido** de recorrido es el de t creciente: de $A = \vec{r}(a)$ a $B = \vec{r}(b)$. La curva es **cerrada** si $A = B$, y la integral se escribe $\oint_C$.

Integral de línea de un campo escalar. Suma los valores de f a lo largo de la curva, con el elemento de longitud $ds = |\vec{r}'(t)| dt$:

$$\int_C f ds = \int_a^b f(\vec{r}(t)) |\vec{r}'(t)| dt$$

No depende del sentido de recorrido. Con $f = 1$ da la longitud de la curva.

Integral de línea de un campo vectorial: el trabajo. Si $\vec{F} = (P, Q, R)$ es una fuerza, el trabajo que realiza sobre una partícula que recorre C es

$$W = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_a^b \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t) dt = \int_C P dx + Q dy + R dz$$

Son las representaciones **vectorial**, **paramétrica** y **diferencial** del mismo número. Aquí **no** aparece $|\vec{r}'|$. Si $\vec{F}$ es un campo de velocidades y C es cerrada, la misma integral se llama **circulación**.

Propiedades.

- Si se invierte el sentido de recorrido, la integral de un campo vectorial cambia de signo: $\int_{-C} \vec{F} \cdot d\vec{r} = - \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$.
- Si C está formada por tramos $C_1, C_2, \dots$, la integral es la suma de las integrales sobre cada tramo.
- El valor no depende de la parametrización elegida, siempre que se respete el sentido.

Ejercicio propuesto 2A.6.7*Adaptado de: 2ª final 2018-1, tipo A, problema 2.*

Sea la curva $C : y = x, z = x^2 + y^2$. Determine en el origen: a) los vectores del triedro móvil; b) la curvatura; c) las coordenadas del centro de la circunferencia de curvatura; d) una ecuación general del plano osculador.

Resultado: $\hat{T} = \frac{(1,1,0)}{\sqrt{2}}, \hat{N} = \hat{k}, \hat{B} = \frac{(1,-1,0)}{\sqrt{2}}; \kappa = 2$; centro $(0, 0, \frac{1}{2})$; plano osculador $x - y = 0$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 93.

Ejercicio propuesto 2A.6.8*Adaptado de: Guía de extraordinario de 1986, grupo 6, ejercicio 1.*

Sea la superficie $\vec{r}(s, t) = (2s + 3t)\hat{i} + (-s + 2t)\hat{j} + (2t^2 - 3s)\hat{k}$. Obtenga la ecuación del plano tangente y de la recta normal a la superficie en el punto donde $x = 1, y = -4$.

Resultado: $s = 2, t = -1$, punto $(1, -4, -4)$; plano tangente $10x - y + 7z + 14 = 0$; recta normal $\frac{x-1}{10} = \frac{y+4}{-1} = \frac{z+4}{7}$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 93.

Ejercicio propuesto 2A.6.9*Adaptado de: Guía de extraordinario de 1986, grupo 7, ejercicio 2.*

Encuentre la ecuación de la recta tangente a la curva de intersección de las superficies $x^2 + y^2 + z^2 = 49$ y $x^2 + y^2 = 13$ en el punto $P(3, 2, -6)$.

Resultado: $\frac{x-3}{2} = \frac{y-2}{-3}, z = -6$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 93.

2A.7 Errores frecuentes

- Torsión sin signo.** El numerador $(\vec{r}' \times \vec{r}'') \cdot \vec{r}'''$ puede ser negativo, y entonces $\tau < 0$ (ejercicio 2A.5.4). No se le pone valor absoluto. Otro caso: $\vec{r} = (4 \cos t, 3t, 4 \sin t)$ en $t = 0$ da $\kappa = \frac{4}{25}$ y $\tau = -\frac{3}{25}$.
- Norma negativa.** $|\vec{v}|, |\vec{r}' \times \vec{r}''|$ y κ nunca son negativos; si sale un signo menos, hay un error.
- Perder la notación vectorial.** « $T = -\sin t + \cos t$ » es un número, no un vector. Se escribe siempre $(\underline{\quad}, \underline{\quad}, \underline{\quad})$ o con $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$.
- Confundir $\vec{v}$ con $\hat{T}$.** $\hat{T} = \vec{v}/|\vec{v}|$; solo coinciden cuando la rapidez vale 1.
- Orden del producto cruz.** $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$. Se usa $\hat{N} = \hat{B} \times \hat{T}$: con $\hat{T} \times \hat{B}$ sale $-\hat{N}$.
- Evaluar demasiado pronto.** Si se sustituye t_0 en $\vec{r}$ y luego se deriva, se deriva una constante y todo da cero. Primero se deriva con t .
- Evaluar demasiado tarde.** Simplificar $\vec{r}' \times \vec{r}''$ con senos y cosenos antes de sustituir es lento y propenso a errores. Se deriva, se evalúa y se hace el producto cruz con números.
- Potencias de las fórmulas.** κ lleva $|\vec{r}'|^3$ (al cubo) y τ lleva $|\vec{r}' \times \vec{r}''|^2$ (al cuadrado). En la hélice del ejemplo 2A.4, $\kappa = \frac{15}{125}$, no $\frac{15}{5}$ (eso es a_N).

Ejercicio propuesto 2B.6.7*Adaptado de: 2ª final 2018-1, tipo A, problema 3.*

Obtenga el laplaciano de la función $f(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}$ en el punto $B(1, 1, 0)$.

Resultado: $\nabla^2 f = 30(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}$; en B , $60\sqrt{2}$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 94.

Ejercicio propuesto 2B.6.8*Adaptado de: Guía de extraordinario de 1986, ejemplo del tema III, inciso c.1.*

Sean las ecuaciones de transformación $x = 2u + 6v, y = -4u + 3v$. Obtenga la expresión del gradiente de $f(u, v) = 2u + v^2$ referida al sistema x, y y evalúela en el punto $u = 1, v = 2$.

Resultado: $\nabla f = \frac{11}{15}\hat{i} - \frac{2}{15}\hat{j}$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 95.

2B.7 Errores frecuentes

- Dirección del jacobiano.** Con $x(u, v)$ sale directo $J\left(\frac{x,y}{u,v}\right)$; con $u(x, y)$ sale $J\left(\frac{u,v}{x,y}\right)$ y se invierte. No se despeja.
- h y $\frac{1}{h}$ mezclados.** En la forma directa $h_u = |\vec{r}_u|$; en la inversa ortogonal $h_u = \frac{1}{|\nabla u|}$. Si en la forma inversa sale $h = \sqrt{10}$, faltó el «uno entre».
- Inversa no ortogonal.** Si $\nabla u \cdot \nabla v \neq 0$, la fórmula $h_u = \frac{1}{|\nabla u|}$ no vale (ejercicio 2B.6.1: da $\frac{1}{\sqrt{5}}$, pero el valor correcto es $\frac{\sqrt{5}}{4}$).
- Olvidar la raíz.** $|(-1, 3)| = \sqrt{10}$, no 10.
- Signo del jacobiano.** $J = -\frac{1}{10}$ es válido: el signo depende del orden de las variables. En áreas, volúmenes e integrales se usa $|J|$.
- $\hat{e}$ sin normalizar.** $\hat{e}_u = \vec{r}_u/h_u$. Si piden el «vector base» sin sombrero, es $\vec{r}_u$ sin dividir.
- Proyectar sin demostrar ortogonalidad.** Antes de escribir $a_u = \vec{a} \cdot \hat{e}_u$ se escribe el producto punto que vale cero.
- Signo de la segunda componente del rotacional.** $\nabla \times \vec{F} = (R_y - Q_z)\hat{i} - (R_x - P_z)\hat{j} + (Q_x - P_y)\hat{k}$. Por ejemplo, $\vec{v} = (y^2 + 5yz, x - 3z^2, x + y)$ tiene $\nabla \times \vec{v} = (1 + 6z)\hat{i} + (5y - 1)\hat{j} + (1 - 2y - 5z)\hat{k}$.
- Factores de escala en el rotacional.** Arriba $h_i \hat{e}_i$, abajo $h_i F_i$ y todo entre $h_u h_v h_w$.
- Ángulo de las esféricas.** Confirma que ϕ se mide desde el eje z : entonces $h_\theta = \rho \sin \phi$ y $|J| = \rho^2 \sin \phi$. Con el orden (ρ, θ, ϕ) el jacobiano sale $-\rho^2 \sin \phi$; con (ρ, ϕ, θ) , $+\rho^2 \sin \phi$. Para el rotacional usa (ρ, ϕ, θ) : con el otro orden el resultado sale con el signo cambiado.

2B.8 Formulario de emergencia de la unidad

- Directa $x(u, v)$: $h_u = |\vec{r}_u|, \hat{e}_u = \vec{r}_u/h_u, J\left(\frac{x,y}{u,v}\right) = \det[\vec{r}_u, \vec{r}_v]$.
- Inversa ortogonal $u(x, y)$: $h_u = 1/|\nabla u|, \hat{e}_u = \nabla u/|\nabla u|, J\left(\frac{x,y}{u,v}\right) = 1/J\left(\frac{u,v}{x,y}\right)$.
- Ortogonal $\Leftrightarrow$ productos punto nulos $\cdot$ ortogonal $\Rightarrow |J| = h_u h_v h_w$.

Unidad 2 · Parte B · Funciones vectoriales: coordenadas curvilíneas, gradiente, divergencia, rotacional y laplaciano

Objetivo (programa de la asignatura). El alumno utilizará e interpretará las variaciones de una función vectorial de variable vectorial y las aplicará para resolver problemas físicos y geométricos en el sistema de referencia más conveniente.

Instrucciones de emergencia

- **Frecuencia:** aparece en 33 de los 35 exámenes revisados, de 2016 a 2026. Casi siempre es el problema 2 o el 3 y vale de 15 a 20 puntos.
- **Tiempo:** de 2 a 3 horas para esta unidad.
- **Ruta corta:**
 1. Lee la sección 2B.1 (20 min).
 2. Sigue el ejemplo 2B.4 tapando la resolución.
 3. Resuelve los ejercicios 2B.5 con cronómetro (15 min cada uno).

2B.1 Conceptos y expresiones

Coordenadas curvilíneas. Un sistema de coordenadas (u, v, w) se define con **ecuaciones de transformación**. Pueden venir de dos formas:

- **Forma directa:** $x = x(u, v, w)$, $y = y(u, v, w)$, $z = z(u, v, w)$. El vector de posición es $\vec{r}(u, v, w) = (x, y, z)$.
- **Forma inversa:** $u = u(x, y, z)$, $v = v(x, y, z)$, $w = w(x, y, z)$.

Al fijar dos coordenadas y variar la tercera se obtiene una **curva coordenada**; al fijar una sola, una **superficie coordenada**.

Vectores base, factores de escala y vectores unitarios.

- **Vector base:** $\vec{r}_u = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u}$, tangente a la curva coordenada u (igual para v y w).
- **Factor de escala:** $h_u = |\vec{r}_u|$. Mide cuánto se avanza en el espacio por cada unidad de u .
- **Vector unitario:** $\hat{e}_u = \frac{\vec{r}_u}{h_u}$.
- **Diferencial del vector de posición:** $d\vec{r} = \vec{r}_u du + \vec{r}_v dv + \vec{r}_w dw = h_u du \hat{e}_u + h_v dv \hat{e}_v + h_w dw \hat{e}_w$.

Sistema ortogonal. El sistema es **ortogonal** si sus vectores base son perpendiculares entre sí:

$$\vec{r}_u \cdot \vec{r}_v = 0, \quad \vec{r}_u \cdot \vec{r}_w = 0, \quad \vec{r}_v \cdot \vec{r}_w = 0$$

En la forma inversa, la condición equivalente es $\nabla u \cdot \nabla v = \nabla u \cdot \nabla w = \nabla v \cdot \nabla w = 0$. En un sistema ortogonal, y **solo** en él:

$$h_u = \frac{1}{|\nabla u|}, \quad \hat{e}_u = \frac{\nabla u}{|\nabla u|}$$

Si el sistema no es ortogonal, h_u y $\hat{e}_u$ se obtienen de la forma directa: se despejan x, y y se usa $\vec{r}_u$.

$$4. \nabla^2 f = \frac{1}{8uv} \left[\frac{\partial(4u^2v)}{\partial u} + \frac{\partial(4uv^2)}{\partial v} \right] = \frac{8uv + 8uv}{8uv} = 2.$$

5. Comprobación: $x + y = 2u^2$ y $x - y = 2v^2$, así que $f = \frac{(x+y)^2 + (x-y)^2}{4} = \frac{x^2 + y^2}{2}$, cuyo laplaciano es $1 + 1 = 2$.

Resultado: $\nabla^2 f = 2$.

Ejercicio 2B.5.10 · Sistema no ortogonal y región imagen

Adaptado de: 1er extraordinario 2024-1, problema 3.

Sean la transformación $u = x^2 + y^2$, $v = x^2 - 4y^2$ y la región R del plano xy limitada por $x^2 - 4y^2 = 1$, $4y^2 - x^2 = 4$, $4x^2 + 4y^2 = 1$ y $x^2 + y^2 = 4$.

- a) Determine si el sistema uv es ortogonal.
- b) Dibuje la región R en el plano xy .
- c) Dibuje la región R' del plano uv , imagen de R .
- d) Calcule el jacobiano $J\left(\frac{x,y}{u,v}\right)$.

Resolución.

1. a) $\nabla u = (2x, 2y)$ y $\nabla v = (2x, -8y)$; $\nabla u \cdot \nabla v = 4x^2 - 16y^2$, que no es cero en general: el sistema **no es ortogonal**.
2. b) R está entre las circunferencias de radios $\frac{1}{2}$ y 2 y entre las hipérbolas $x^2 - 4y^2 = 1$ (abre hacia el eje x) y $x^2 - 4y^2 = -4$ (abre hacia el eje y). Por simetría basta el primer cuadrante.
3. c) Las curvas frontera son $u = \frac{1}{4}$, $u = 4$, $v = 1$ y $v = -4$. Como $x^2 = \frac{4u+v}{5} \geq 0$ y $y^2 = \frac{u-v}{5} \geq 0$, la imagen además cumple $-4u \leq v \leq u$. R' es la parte del rectángulo $\frac{1}{4} \leq u \leq 4$, $-4 \leq v \leq 1$ que queda dentro de esa cuña.
4. d) $J\left(\frac{u,v}{x,y}\right) = \begin{vmatrix} 2x & 2y \\ 2x & -8y \end{vmatrix} = -16xy - 4xy = -20xy$.
5. $J\left(\frac{x,y}{u,v}\right) = -\frac{1}{20xy}$. En el primer cuadrante, $xy = \frac{1}{5}\sqrt{(4u+v)(u-v)}$.

Resultado: no ortogonal; $J\left(\frac{x,y}{u,v}\right) = -\frac{1}{20xy} = -\frac{1}{4\sqrt{(4u+v)(u-v)}}$ en el primer cuadrante.

2B.6 Ejercicios propuestos

Resuélvelos sin ver la solución. Las resoluciones completas están en el **Apéndice E, sección E.2B**.

Ejercicio propuesto 2B.6.1

Adaptado de: 2ª final 2025-1, tipo A, problema 3.

Sea la transformación $u = x - 2y$, $v = x + 2y$. Determine: a) si el sistema (u, v) es ortogonal; b) el jacobiano $J\left(\frac{x,y}{u,v}\right)$; c) las ecuaciones de la transformación inversa; d) los factores de escala h_u, h_v ; e) los vectores $\hat{e}_u, \hat{e}_v$.

Si es negativo, el rotacional sale con el signo cambiado: divide entre el jacobiano con su signo o reordena las coordenadas. En esféricas usa el orden (ρ, ϕ, θ) ; con (ρ, θ, ϕ) el jacobiano vale $-\rho^2 \sin \phi$.

En **cilíndricas**:

$$\nabla \cdot \vec{F} = \frac{1}{r} \frac{\partial(rF_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial F_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial F_z}{\partial z}, \quad \nabla^2 f = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

$$\nabla \times \vec{F} = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial F_z}{\partial \theta} - \frac{\partial F_\theta}{\partial z} \right) \hat{e}_r + \left(\frac{\partial F_r}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial r} \right) \hat{e}_\theta + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial(rF_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial F_r}{\partial \theta} \right) \hat{e}_z$$

En **esféricas**, para una función que solo depende de ρ : $\nabla^2 f = \frac{1}{\rho^2} \frac{d}{d\rho} \left(\rho^2 \frac{df}{d\rho} \right)$.

En **cartesianas**, con $\vec{F} = (P, Q, R)$:

$$\nabla \cdot \vec{F} = P_x + Q_y + R_z, \quad \nabla \times \vec{F} = (R_y - Q_z) \hat{i} - (R_x - P_z) \hat{j} + (Q_x - P_y) \hat{k}, \quad \nabla^2 f = f_{xx} + f_{yy} + f_{zz}$$

Interpretación física.

- La **divergencia** es el flujo neto que sale por unidad de volumen: positiva en una fuente, negativa en un sumidero. Si $\nabla \cdot \vec{F} = 0$, el campo es **solenoidal**.
- El **rotacional** mide la tendencia del campo a hacer girar; su componente en una dirección es la circulación por unidad de área. Si $\nabla \times \vec{F} = \vec{0}$, el campo es **irrotacional**.
- El **laplaciano** es $\nabla^2 f = \nabla \cdot (\nabla f)$. Una función con $\nabla^2 f = 0$ es **armónica**.

Propiedades del operador nabla. $\nabla \times (\nabla f) = \vec{0} \cdot \nabla \cdot (\nabla \times \vec{F}) = 0 \cdot \nabla \cdot (f \vec{F}) = \nabla f \cdot \vec{F} + f \nabla \cdot \vec{F} \cdot \nabla \times (f \vec{F}) = \nabla f \times \vec{F} + f \nabla \times \vec{F}$.

2B.2 Cómo reconocer el problema

Si el enunciado dice...	Se trata de...	Procedimiento
« $x = \dots$, $y = \dots$ en función de u, v »: ortogonal, $h, \hat{e}$, jacobiano	forma directa	2B.3.1
« $u = \dots$, $v = \dots$ en función de x, y »: ortogonal, $h, \hat{e}$, jacobiano	forma inversa	2B.3.2
«determine si es ortogonal» y el producto punto no es cero	sistema no ortogonal	2B.3.3
«valor de a para que la transformación sea ortogonal»	ortogonalidad con un parámetro	2B.3.1
«área de la imagen de la región», «dibuje la región R' »	jacobiano y región	2B.3.2
«transformar el vector», «expresar $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ en términos de $\hat{e}_u, \hat{e}_v, \hat{e}_w$ »	componentes en la base nueva	2B.3.4
«gradiente de $f(u, v)$ expresado en el sistema»	gradiente	2B.3.5
«divergencia», «rotacional» en cilíndricas o en el sistema UVW ; «¿es solenoidal?»	divergencia y rotacional	2B.3.6

Resultado: ortogonal; $h_u = h_v = \frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2}}$; $J\left(\frac{x,y}{u,v}\right) = \frac{1}{4(x^2+y^2)} = \frac{1}{4\sqrt{u^2+v^2}}$. Es la inversa de la transformación del ejercicio 2B.5.3.

Ejercicio 2B.5.5 · Parámetro que hace ortogonal al sistema

Adaptado de: 2º extraordinario 2018-1, tipo A, problema 2.

Sea la transformación $x = 2u^2 + v^2$, $y = u^2 + av^2$, $z = 3w$.

- a) Determine el valor de a para que la transformación sea ortogonal.
- b) Expresé los vectores $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ en términos de los vectores base $\hat{e}_u, \hat{e}_v, \hat{e}_w$.

Resolución.

- Forma directa: $\vec{r}_u = (4u, 2u, 0)$, $\vec{r}_v = (2v, 2av, 0)$, $\vec{r}_w = (0, 0, 3)$.
- $\vec{r}_u \cdot \vec{r}_w = 0$ y $\vec{r}_v \cdot \vec{r}_w = 0$ para todo a .
- a) $\vec{r}_u \cdot \vec{r}_v = 8uv + 4a uv = 4uv(2+a) = 0 \Rightarrow a = -2$.
- Con $a = -2$ y $u, v > 0$: $h_u = \sqrt{16u^2 + 4u^2} = 2\sqrt{5}u$, $h_v = \sqrt{4v^2 + 16v^2} = 2\sqrt{5}v$, $h_w = 3$.
- $\hat{e}_u = \frac{(2,1,0)}{\sqrt{5}}$, $\hat{e}_v = \frac{(1,-2,0)}{\sqrt{5}}$, $\hat{e}_w = \hat{k}$.
- b) Los coeficientes de $\hat{i}$ son las primeras componentes de cada $\hat{e}$, y así sucesivamente.

Resultado: $a = -2$; $\hat{i} = \frac{2\hat{e}_u + \hat{e}_v}{\sqrt{5}}$, $\hat{j} = \frac{\hat{e}_u - 2\hat{e}_v}{\sqrt{5}}$, $\hat{k} = \hat{e}_w$ (para $u, v > 0$). Comprobación: $|J| = 60uv = h_u h_v h_w$.

Ejercicio 2B.5.6 · Gradiente en un sistema UVW

Adaptado de: 3er extraordinario 2024-1, problema 2 (repetido en el 2º final 2024-1, tipo A).

Sea el sistema UVW definido por $x = u - v$, $y = u + v$, $z = w$. Determine:

- a) si el sistema es ortogonal;
- b) los vectores $\hat{e}_u, \hat{e}_v, \hat{e}_w$;
- c) el gradiente del campo $\varphi(u, v, w) = \sqrt{2}u^2 - \sqrt{2}v^2 + 2w^2$ expresado en el sistema UVW .

Resolución.

- Forma directa: $\vec{r}_u = (1, 1, 0)$, $\vec{r}_v = (-1, 1, 0)$, $\vec{r}_w = (0, 0, 1)$.
- a) $\vec{r}_u \cdot \vec{r}_v = -1 + 1 = 0$, $\vec{r}_u \cdot \vec{r}_w = 0$ y $\vec{r}_v \cdot \vec{r}_w = 0$: **ortogonal**.
- $h_u = \sqrt{2}$, $h_v = \sqrt{2}$, $h_w = 1$.
- b) $\hat{e}_u = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0)$, $\hat{e}_v = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 1, 0)$, $\hat{e}_w = \hat{k}$.
- c) $\varphi_u = 2\sqrt{2}u$, $\varphi_v = -2\sqrt{2}v$, $\varphi_w = 4w$. Cada una se divide entre su factor de escala.

Resultado: $\nabla \varphi = 2u \hat{e}_u - 2v \hat{e}_v + 4w \hat{e}_w$.

Ejercicio 2B.5.7 · Rotacional en un sistema lineal

Adaptado de: 2º extraordinario 2025-1, problema 3.

El sistema UVW está definido por $x = 2u + 2v + w$, $y = -2u + v + 2w$, $z = u - 2v + 2w$. Determine:

- a) si el sistema es ortogonal;
- b) los factores de escala h_u, h_v, h_w ;

2B.3.6 Divergencia y rotacional

1. Si el campo viene en cartesianas y lo piden en cilíndricas, obtén F_r , F_θ y F_z con las fórmulas de 2B.1 y sustituye $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$.
2. Escribe la fórmula general con los h del sistema.
3. En el rotacional: comprueba que el orden (u, v, w) da jacobiano positivo (en esféricas, (ρ, ϕ, θ)); arriba $h_i \hat{e}_i$, abajo $h_i F_i$, todo dividido entre $h_u h_v h_w$. Desarrolla término a término, con el signo menos de la segunda componente.
4. Solenoidal: divergencia igual a cero. Irrotacional: rotacional igual al vector cero.

2B.3.7 Laplaciano

1. Identifica el sistema más cómodo: si f depende de $x^2 + y^2 + z^2$, usa esféricas; si depende de $x^2 + y^2$, cilíndricas; si viene dada en (u, v, w) , el sistema dado.
2. Calcula los h y escribe la fórmula general.
3. Deriva desde adentro hacia afuera y simplifica.
4. Si piden el valor en un punto, sustituye al final.

2B.4 Ejemplo resuelto

Adaptado de: 1er final 2024-1, tipo A, problema 3.

Sea el sistema de coordenadas curvilíneas definido por $u = -x + 3y$, $v = 3x + y$. Determine:

- a) si el sistema (u, v) es ortogonal;
- b) los vectores unitarios $\hat{e}_u$, $\hat{e}_v$;
- c) los factores de escala h_u , h_v ;
- d) el jacobiano $J\left(\frac{x,y}{u,v}\right)$.

Datos: forma **inversa** (u y v en función de x y y).

Planteamiento. Se trabaja con los gradientes y, al final, se invierte el jacobiano. No se despeja nada.

Resolución.

1. $\nabla u = (-1, 3)$ y $\nabla v = (3, 1)$.
2. a) $\nabla u \cdot \nabla v = (-1)(3) + (3)(1) = 0$: el sistema **sí es ortogonal**.
3. $|\nabla u| = \sqrt{1+9} = \sqrt{10}$ y $|\nabla v| = \sqrt{9+1} = \sqrt{10}$.
4. b) $\hat{e}_u = \frac{-\hat{i} + 3\hat{j}}{\sqrt{10}}$ y $\hat{e}_v = \frac{3\hat{i} + \hat{j}}{\sqrt{10}}$.
5. c) $h_u = h_v = \frac{1}{\sqrt{10}}$.
6. $J\left(\frac{u,v}{x,y}\right) = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = (-1)(1) - (3)(3) = -10$.
7. d) $J\left(\frac{x,y}{u,v}\right) = \frac{1}{-10} = -\frac{1}{10}$.
8. Comprobación: $h_u h_v = \frac{1}{10} = |J|$.

Resultado: ortogonal; $\hat{e}_u = \frac{(-1,3)}{\sqrt{10}}$, $\hat{e}_v = \frac{(3,1)}{\sqrt{10}}$; $h_u = h_v = \frac{1}{\sqrt{10}}$; $J\left(\frac{x,y}{u,v}\right) = -\frac{1}{10}$.

Las transformaciones lineales de los exámenes recientes se resuelven con

pura aritmética: las derivadas son los coeficientes. Lo único que hay que decidir es si se dieron $x(u, v)$ o $u(x, y)$.

2B.5 Ejercicios de examen (resueltos)

Ejercicio 2B.5.1 · Transformación lineal inversa

Adaptado de: 1er final 2025-1, tipo A, problema 3.

Sea el sistema $u = x - \sqrt{3}y$, $v = \sqrt{3}x + y$. Determine si es ortogonal, los vectores $\hat{e}_u$, $\hat{e}_v$, los factores de escala h_u , h_v y el jacobiano $J\left(\frac{x,y}{u,v}\right)$.

Resolución.

1. Forma inversa: $\nabla u = (1, -\sqrt{3})$, $\nabla v = (\sqrt{3}, 1)$.
2. $\nabla u \cdot \nabla v = \sqrt{3} - \sqrt{3} = 0$: **ortogonal**.
3. $|\nabla u| = |\nabla v| = \sqrt{1+3} = 2$, así que $h_u = h_v = \frac{1}{2}$.
4. $\hat{e}_u = \left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ y $\hat{e}_v = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$.
5. $J\left(\frac{u,v}{x,y}\right) = \begin{vmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{vmatrix} = 1 + 3 = 4$, de donde $J\left(\frac{x,y}{u,v}\right) = \frac{1}{4}$. Comprobación: $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$.

Resultado: ortogonal; $h_u = h_v = \frac{1}{2}$; $J\left(\frac{x,y}{u,v}\right) = \frac{1}{4}$.

Ejercicio 2B.5.2 · Área de la región imagen

Adaptado de: 1er final 2025-2, tipo A, problema 3.

Sea la transformación $u = 4x + 8y + 1$, $v = y - 2x$, y sea R_{xy} una región del plano XY de área 5 $[u^2]$. Determine:

- a) si el sistema (u, v) es ortogonal;
- b) los vectores $\hat{e}_u$, $\hat{e}_v$ y los factores de escala h_u , h_v ;
- c) el jacobiano $J\left(\frac{x,y}{u,v}\right)$;
- d) el área de la región R_{uv} , imagen de R_{xy} bajo la transformación.

Resolución.

1. $\nabla u = (4, 8)$ y $\nabla v = (-2, 1)$.
2. a) $\nabla u \cdot \nabla v = -8 + 8 = 0$: **ortogonal**.
3. b) $|\nabla u| = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}$ y $|\nabla v| = \sqrt{5}$. Entonces $\hat{e}_u = \frac{(1,2)}{\sqrt{5}}$, $\hat{e}_v = \frac{(-2,1)}{\sqrt{5}}$, $h_u = \frac{1}{4\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{20}$ y $h_v = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$.
4. c) $J\left(\frac{u,v}{x,y}\right) = \begin{vmatrix} 4 & 8 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 4 + 16 = 20$, de donde $J\left(\frac{x,y}{u,v}\right) = \frac{1}{20}$.
5. d) Cada elemento de área se multiplica por $|J\left(\frac{u,v}{x,y}\right)| = 20$: $A_{uv} = 20 \cdot 5 = 100$.

Resultado: ortogonal; $h_u = \frac{\sqrt{5}}{20}$, $h_v = \frac{\sqrt{5}}{5}$; $J = \frac{1}{20}$; **área de $R_{uv} = 100 u^2$.**