

4.  $x^2 - x - 6 = (x - 3)(x + 2)$ .

5. **Raíces:**  $1 - i$ ,  $1$ ,  $-1$ ,  $3$ ,  $-2$ .

$$P(x) = (x - 1 + i)(x - 1)(x + 1)(x - 3)(x + 2).$$

#### Ejercicio 4.5.4 · Polinomio bicuadrado y cota superior

Adaptado de: 1er final 2013-2, tipo A, problema 3.

Obtenga las raíces del polinomio  $p(x) = x^8 + x^4 - 6$  y una cota superior de sus raíces reales.

#### Resolución.

1. Con  $u = x^4$ :  $u^2 + u - 6 = (u + 3)(u - 2) = 0$ , así que  $u = 2$  o  $u = -3$ .

2.  $x^4 = 2$ : raíces cuartas de  $2 = 2 \text{ cis } 0^\circ$ . Módulo  $\sqrt[4]{2}$ , ángulos  $0^\circ, 90^\circ, 180^\circ, 270^\circ$ :

$$x = \sqrt[4]{2}, \quad \sqrt[4]{2}i, \quad -\sqrt[4]{2}, \quad -\sqrt[4]{2}i.$$

3.  $x^4 = -3 = 3 \text{ cis } 180^\circ$ : módulo  $\sqrt[4]{3}$ , ángulos  $\frac{180^\circ + 360^\circ k}{4} = 45^\circ, 135^\circ, 225^\circ, 315^\circ$ . En forma binómica,  $\sqrt[4]{3} \text{ cis } 45^\circ = \frac{\sqrt[4]{3}}{\sqrt{2}}(1 + i)$ , y las otras tres son

$$\frac{\sqrt[4]{3}}{\sqrt{2}}(-1 + i), \quad \frac{\sqrt[4]{3}}{\sqrt{2}}(-1 - i), \quad \frac{\sqrt[4]{3}}{\sqrt{2}}(1 - i).$$

4. **Ocho raíces:**  $\pm\sqrt[4]{2}, \pm\sqrt[4]{2}i$  y  $\sqrt[4]{3} \text{ cis } \theta$  con  $\theta = 45^\circ, 135^\circ, 225^\circ, 315^\circ$ .

5. Cota superior. Con  $c = 1$  el residuo es negativo:

|   |   |   |   |   |   |   |   |   |    |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|----|
| 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | -6 |
|   | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2  |
|   | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 | 2 | -4 |

Con  $c = 2$ , todos los resultados son positivos:

|   |   |   |   |    |    |    |     |     |     |
|---|---|---|---|----|----|----|-----|-----|-----|
| 2 | 1 | 0 | 0 | 0  | 1  | 0  | 0   | 0   | -6  |
|   | 2 | 4 | 8 | 16 | 34 | 68 | 136 | 272 | 272 |
|   | 1 | 2 | 4 | 8  | 17 | 34 | 68  | 136 | 266 |

6. **Cota superior:**  $c = 2$ . En efecto, la única raíz real positiva es  $\sqrt[4]{2} < 2$ .

#### Ejercicio 4.5.5 · Polinomio de menor grado a partir de su gráfica

Adaptado de: 2º final 2013-2, tipo A, problema 3.

Determine el polinomio de menor grado, con coeficientes reales, cuya gráfica es la de la figura: corta el eje  $x$  en  $-2$ ,  $0$ ,  $1$  y  $3$  (en los cuatro puntos lo cruza), crece hacia ambos extremos y pasa por el punto  $(-1, -8)$ .

Lado derecho de la tesis:

$$\begin{aligned} (k^2 + 2k + 1)(2k^2 + 4k + 1) &= 2k^4 + 4k^3 + k^2 + 4k^3 + 8k^2 \\ &\quad + 2k + 2k^2 + 4k + 1 \\ &= 2k^4 + 8k^3 + 11k^2 + 6k + 1. \end{aligned}$$

Son iguales.

**Conclusión:** por el principio de inducción matemática, la igualdad se cumple para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

#### Ejercicio 2.5.3 · Suma con potencias de 3 en el denominador

Adaptado de: 2º final 2010-2, problema 1.

Demuestre que, para todo  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$1 + \frac{5}{9} + \frac{7}{27} + \dots + \frac{2n+1}{3^n} = -\left(\frac{1}{3}\right)^n (n+2) + 2.$$

#### Resolución.

**Proposición.** Término general  $\frac{2n+1}{3^n}$  (con  $n = 1$  da  $\frac{3}{3} = 1$ ). El sumando nuevo es  $\frac{2k+3}{3^{k+1}}$ . El lado derecho se escribe mejor como  $2 - \frac{n+2}{3^n}$ .

**Base** ( $n = 1$ ). Izquierdo:  $\frac{3}{3} = 1$ . Derecho:  $2 - \frac{3}{3} = 1$ . Se cumple.

**Hipótesis** ( $n = k$ ).  $1 + \frac{5}{9} + \dots + \frac{2k+1}{3^k} = 2 - \frac{k+2}{3^k}$ .

**Tesis** ( $n = k + 1$ ).  $1 + \frac{5}{9} + \dots + \frac{2k+3}{3^{k+1}} = 2 - \frac{k+3}{3^{k+1}}$ .

**Paso inductivo.** Denominador común  $3^{k+1}$ :

$$\begin{aligned} 2 - \frac{k+2}{3^k} + \frac{2k+3}{3^{k+1}} &= 2 - \frac{3(k+2) - (2k+3)}{3^{k+1}} \\ &= 2 - \frac{k+3}{3^{k+1}} = -\left(\frac{1}{3}\right)^{k+1} (k+3) + 2. \end{aligned}$$

**Conclusión:** por el principio de inducción matemática, la igualdad se cumple para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

#### Ejercicio 2.5.4 · Producto que empieza en $n = 2$

Adaptado de: 1er final 2016-2, tipo A, problema 2.

Demuestre por inducción matemática que, para todo natural  $n \geq 2$ ,

$$\left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{3}\right)\left(1 - \frac{1}{4}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n}.$$

#### Resolución.

**Proposición.** Es un producto: el factor general es  $1 - \frac{1}{n}$  y el factor nuevo es  $1 - \frac{1}{k+1}$ . La base es  $n = 2$ .

**Ejemplo resuelto · Raíz imaginaria dada en un polinomio real**

Adaptado de: 1er final 2010-2, turno matutino, tipo A, problema 3.

Determine todas las raíces del polinomio

$$f(x) = 2x^6 - x^5 - 2x^2 + x,$$

si se sabe que  $\alpha = i$  es una de ellas.**Resolución.**

1. No hay término independiente:  $f(x) = x(2x^5 - x^4 - 2x + 1)$ . Primera raíz:  $x = 0$ .
2. Los coeficientes son reales, así que  $\bar{\alpha} = -i$  también es raíz. Se divide  $g(x) = 2x^5 - x^4 + 0x^3 + 0x^2 - 2x + 1$  entre  $x - i$  y luego entre  $x + i$ :

$$\begin{array}{r|rrrrrr} i & 2 & -1 & 0 & 0 & -2 & 1 \\ & & 2i & -2-i & 1-2i & 2+i & -1 \\ \hline & 2 & -1+2i & -2-i & 1-2i & i & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|rrrrrr} -i & 2 & -1+2i & -2-i & 1-2i & i \\ & & -2i & i & 2i & -i \\ \hline & 2 & -1 & -2 & 1 & 0 \end{array}$$

3. Queda  $2x^3 - x^2 - 2x + 1$ . Se agrupa:  $x^2(2x - 1) - (2x - 1) = (2x - 1)(x^2 - 1) = (2x - 1)(x - 1)(x + 1)$ .
4. Comprobación con raíces racionales: los candidatos son  $\pm 1, \pm \frac{1}{2}$ , y los tres que salen están en la lista.
5. **Raíces:** 0,  $i$ ,  $-i$ ,  $\frac{1}{2}$ , 1,  $-1$ . Son seis, como el grado.

$$f(x) = 2x(x - i)(x + i)(x - \frac{1}{2})(x - 1)(x + 1).$$

**4.5 Ejercicios de examen (resueltos)****Ejercicio 4.5.1 · Coeficientes a partir de dos raíces**

Adaptado de: 2º final 2010-1, tipo A, problema 3.

Dado el polinomio  $P(x) = x^4 + x^3 - 7x^2 - Ax + 2B$ , determine:

- a) los valores de  $A$  y  $B$  si 1 y  $-1$  son raíces de  $P$ ;
- b) la expresión de  $P(x)$  como producto de sus factores lineales.

**Resolución.**

1.  $P(1) = 1 + 1 - 7 - A + 2B = 0 \Rightarrow -A + 2B = 5$ .
2.  $P(-1) = 1 - 1 - 7 + A + 2B = 0 \Rightarrow A + 2B = 7$ .
3. Sumando:  $4B = 12$ ,  $B = 3$ ; entonces  $A = 7 - 6 = 1$ . a)  $A = 1$ ,  $B = 3$ .
4.  $P(x) = x^4 + x^3 - 7x^2 - x + 6$ . Se divide entre  $x - 1$  y el cociente entre  $x + 1$ :

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & 1 & -7 & -1 & 6 \\ 1 & & 1 & 2 & -5 & -6 \\ -1 & 1 & 2 & -5 & -6 & 0 \\ & & -1 & -1 & 6 & \\ \hline & 1 & 1 & -6 & 0 & \end{array}$$

**Resultado:**  $x \in (-\infty, -14] \cup (6, \infty)$ .**Ejercicio 2.5.7 · Valor absoluto de un cociente**

Adaptado de: 2º final 2014-1, tipo A, problema 1.

Resuelva  $\left| \frac{3x-2}{5x+1} \right| < 3$ .**Resolución.**

1. Restricción:  $5x + 1 \neq 0$ , es decir,  $x \neq -\frac{1}{5}$ .
2. Los dos lados son no negativos:  $\left| \frac{3x-2}{5x+1} \right| < 3 \iff |3x-2| < 3|5x+1| \iff (3x-2)^2 < (15x+3)^2$ .
3. Diferencia de cuadrados:

$$\begin{aligned} (3x-2)^2 - (15x+3)^2 &= (3x-2-15x-3)(3x-2+15x+3) \\ &= (-12x-5)(18x+1) < 0. \end{aligned}$$

4. Se multiplica por  $-1$  y se invierte el sentido:  $(12x+5)(18x+1) > 0$ . Puntos críticos:  $-\frac{5}{12}$  y  $-\frac{1}{18}$ .
5. Tabla de signos:

|           | $x < -\frac{5}{12}$ | $-\frac{5}{12} < x < -\frac{1}{18}$ | $x > -\frac{1}{18}$ |
|-----------|---------------------|-------------------------------------|---------------------|
| $12x + 5$ | -                   | +                                   | +                   |
| $18x + 1$ | -                   | -                                   | +                   |
| producto  | +                   | -                                   | +                   |

6. El valor excluido  $-\frac{1}{5}$  está entre  $-\frac{5}{12}$  y  $-\frac{1}{18}$ , fuera de la solución.

**Resultado:**  $x \in (-\infty, -\frac{5}{12}) \cup (-\frac{1}{18}, \infty)$ .**Ejercicio 2.5.8 · Valor absoluto contra valor absoluto**

Adaptado de: 2º final 2020-1, problema 2.

Obtenga el conjunto solución de  $|3x - 2| \leq |3 + x|$ .**Resolución.**

1. Los dos lados son no negativos:  $|3x - 2| \leq |x + 3| \iff (3x - 2)^2 \leq (x + 3)^2$ .
2. Diferencia de cuadrados:

$$(3x-2)^2 - (x+3)^2 = (3x-2-x-3)(3x-2+x+3) = (2x-5)(4x+1) \leq 0.$$

3. Puntos críticos:  $x = -\frac{1}{4}$  y  $x = \frac{5}{2}$ . El producto de dos factores con coeficiente positivo es negativo *entre* sus raíces, y vale cero en ellas.
4. Comprobación con  $x = 0$ :  $|-2| = 2 \leq 3 = |3|$ . Se cumple.

**Resultado:**  $x \in [-\frac{1}{4}, \frac{5}{2}]$ .

## 4.3.3 Regla de los signos de Descartes

1. Si  $a_0 = 0$ , factoriza  $x^k$  y trabaja con el otro factor.
2. Cuenta los cambios de signo de los coeficientes de  $p(x)$  (los ceros se saltan): da las posibles raíces positivas.
3. Escribe  $p(-x)$ : cambian de signo los coeficientes de las potencias **impares**. Cuenta sus cambios: posibles raíces negativas.
4. Arma la tabla: positivas y negativas bajan de dos en dos; las complejas completan el grado y siempre son un número par. Por ejemplo, para un polinomio de grado 5 con 2 cambios en  $p(x)$  y 1 en  $p(-x)$ :

|           | 1 <sup>a</sup> | 2 <sup>a</sup> |
|-----------|----------------|----------------|
| Positivas | 2              | 0              |
| Negativas | 1              | 1              |
| Complejas | 2              | 4              |
| Total     | 5              | 5              |

Descartes no da las raíces; solo dice cuáles candidatos racionales vale la pena probar: si no hay positivas posibles, no se prueban los candidatos positivos.

## 4.3.4 Raíz compleja dada

1. Revisa los coeficientes.
2. **Si son reales:** el conjugado también es raíz. Divide dos veces seguidas (entre  $x - \alpha$  y entre  $x - \bar{\alpha}$ ), o divide una vez entre el factor cuadrático  $x^2 - 2\alpha x + (\alpha^2 + b^2)$ . El cociente tiene dos grados menos.
3. **Si alguno es complejo:** divide solo entre  $x - \alpha$ . El cociente puede quedar con coeficientes reales; a partir de ahí, posibles raíces racionales o fórmula general.
4. En la división sintética con complejos, multiplica con  $i^2 = -1$  y suma partes reales con reales e imaginarias con imaginarias. El residuo debe salir exactamente 0; si no, hay un error de cuentas.

## 4.3.5 Coeficientes desconocidos

Cada dato se convierte en una ecuación lineal para los coeficientes:

- « $c$  es raíz», « $x - c$  es factor», «es divisible entre  $x - c$ », «la gráfica corta el eje en  $c$ »:  $p(c) = 0$ .
- «la gráfica contiene al punto  $(a, b)$ »:  $p(a) = b$ . Si  $a = 0$ , da directo el término independiente.
- « $\alpha$  es raíz de multiplicidad 2»: dos divisiones sintéticas seguidas entre  $x - \alpha$ , cada una con residuo 0 (equivale a  $p(\alpha) = 0$  y  $p'(\alpha) = 0$ ).

Resuelve el sistema, sustituye los valores en  $p(x)$  y **comprueba** cada dato antes de buscar las raíces.

## 4.3.6 Polinomio a partir de su gráfica

1. Lee las raíces reales: los cortes con el eje  $x$ .
2. Asigna multiplicidad: si la curva *crusa* el eje, 1 (o impar); si lo *toca* y regresa, 2 (o par). El polinomio de menor grado usa la menor multiplicidad posible.
3. Escribe  $p(x) = a(x - r_1)^{m_1}(x - r_2)^{m_2} \dots$ .

**Resultado:**  $x \in \left(-\frac{5}{12}, -\frac{1}{5}\right) \cup \left(-\frac{1}{5}, -\frac{1}{18}\right)$ .

→ Resolución en el Apéndice E, p. 103.

## Ejercicio propuesto 2.6.6

Adaptado de: 2<sup>o</sup> final 2019-2, problema 2.

Obtenga el conjunto de valores de  $x \in \mathbb{R}$  que satisfacen  $\left|\frac{2x+6}{x-4}\right| < 2$ .

**Resultado:**  $x \in \left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$ .

→ Resolución en el Apéndice E, p. 103.

## 2.7 Errores frecuentes

1. **Base con todos los sumandos.** En la base el lado izquierdo es *solo* el primer sumando: con  $n = 1$ ,  $1 + 6 + 6^2 + \dots + 6^{n-1}$  vale  $6^0 = 1$ .
2. **Sumando nuevo mal escrito.** Se obtiene sustituyendo  $n = k + 1$  en el término general: si es  $6^{n-1}$ , el nuevo es  $6^k$ , no  $6^{k+1}$ .
3. **Usar la tesis para demostrarla.** El paso inductivo parte del lado izquierdo de  $P(k + 1)$  y llega a su lado derecho; la tesis no se usa como si ya fuera cierta.
4. **Base equivocada.** Si el enunciado dice  $\forall n \geq 2$ , la base es  $n = 2$ : con  $n = 1$  el factor  $1 - \frac{1}{n}$  vale 0.
5. **Sumar en un producto.** En una inducción con productos, el factor nuevo *multiplica*.
6. **Multiplicar por el denominador.** En  $\frac{3x-2}{4x+1} < 3$ , pasar  $4x + 1$  multiplicando supone que es positivo; se pierden soluciones.
7. **Olvidar invertir el sentido** al multiplicar o dividir entre un negativo.
8. **Incluir el cero del denominador.** Con  $\geq$  o  $\leq$  entran las raíces del numerador, nunca las del denominador.
9. **Valor absoluto con una sola rama.**  $|A| > c$  son *dos* desigualdades unidas con «o»;  $|A| < c$  es una desigualdad doble.
10. **Dejar el resultado sin intervalos.** El conjunto solución se escribe con intervalos y uniones.

## 2.8 Formulario de emergencia de la unidad

- Inducción: base  $P(n_0)$  · hipótesis  $P(k)$  · tesis  $P(k + 1)$  · conclusión.
- Sumando nuevo: término general con  $n = k + 1$ . Lado izquierdo de  $P(k + 1)$  = lado izquierdo de  $P(k)$  + sumando nuevo.
- Geométrica:  $1 + r + \dots + r^{n-1} = \frac{r^n - 1}{r - 1}$  ( $r \neq 1$ ) · aritmética:  $\sum_{j=1}^n [a + (j-1)d] = \frac{n}{2} [2a + (n-1)d]$ .
- $a < b$  y  $c < 0 \Rightarrow ac > bc$ .
- $|A| < c \Leftrightarrow -c < A < c \cdot |A| > c \Leftrightarrow A < -c$  o  $A > c$  (con  $c > 0$ ).
- $|A| < |B| \Leftrightarrow A^2 < B^2 \Leftrightarrow (A - B)(A + B) < 0 \cdot \left|\frac{A}{B}\right| = \left|\frac{A}{B}\right|$ .
- Racional:  $\frac{N}{D} < 0$  ( $0 \leq, >, \geq$ ), puntos críticos, tabla de signos; los ceros de  $D$  siempre quedan fuera.
- Un producto  $(x - a)(x - b)$  con  $a < b$  es negativo entre  $a$  y  $b$ , y positivo fuera.

**Raíces conjugadas.** Si los coeficientes son **reales** y  $a + bi$  es raíz, también lo es  $a - bi$ . Las dos juntas dan un factor cuadrático real:

$$(x - (a + bi))(x - (a - bi)) = x^2 - 2ax + (a^2 + b^2).$$

Del mismo modo, si los coeficientes son **racionales** y  $a + \sqrt{b}$  es raíz ( $\sqrt{b}$  irracional), también lo es  $a - \sqrt{b}$ . Si algún coeficiente es complejo, el conjugado de una raíz **no** es necesariamente raíz.

**Posibles raíces racionales.** Si los coeficientes son enteros y  $\frac{p}{q}$  (fracción reducida) es raíz, entonces  $p$  divide a  $a_0$  y  $q$  divide a  $a_n$ . La lista de candidatos es

$$\pm \frac{\text{divisores de } a_0}{\text{divisores de } a_n}.$$

**Regla de los signos de Descartes.** Con  $p$  de coeficientes reales y  $a_0 \neq 0$ :

- el número de raíces reales **positivas** es igual al número de cambios de signo de los coeficientes de  $p(x)$ , o menor que él en un número par;
- el número de raíces reales **negativas** es igual al número de cambios de signo de  $p(-x)$ , o menor en un número par.

Si  $a_0 = 0$ , primero se factoriza la potencia de  $x$ :  $x = 0$  es raíz y Descartes se aplica al otro factor.

**Cota de las raíces.** Un número  $c > 0$  es *cota superior* de las raíces reales si ninguna raíz real es mayor que  $c$ . Si al dividir sintéticamente  $p$  (con  $a_n > 0$ ) entre  $x - c$  todos los números del renglón de resultados son mayores o iguales que cero,  $c$  es cota superior. Una cota inferior de  $p$  es el negativo de una cota superior de  $p(-x)$ .

**Relaciones entre raíces y coeficientes.** Si  $p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_0$  (coeficiente principal 1), la suma de las raíces es  $-a_{n-1}$  y su producto es  $(-1)^n a_0$ . Sirven para comprobar el resultado.

## 4.2 Cómo reconocer el problema

| Si el enunciado dice...                                                                                   | Se pide...                                      | Procedimiento |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------|---------------|
| «si se sabe que $\alpha = i$ (o $1 - 3i$ ) es raíz»                                                       | dividir entre $x - \alpha$ y seguir             | 4.3.1, 4.3.4  |
| «expresar como producto de factores lineales»                                                             | todas las raíces y $a_n$                        | 4.3.1         |
| coeficientes con $i$ y una raíz dada                                                                      | dividir solo entre $x - \alpha$ , sin conjugado | 4.3.4         |
| «determinar $A$ y $B$ si $1$ y $-1$ son raíces», «si contiene al punto», «si es divisible entre $x - 2$ » | ecuaciones para los coeficientes                | 4.3.5         |
| «raíz de multiplicidad 2»                                                                                 | dos divisiones con residuo cero                 | 4.3.5         |

## Unidad 3 · Números complejos: formas binómica, polar y exponencial; ecuaciones

**Objetivo (programa de la asignatura).** El alumno usará los números complejos en sus diferentes representaciones y sus propiedades, para resolver ecuaciones con una incógnita que contengan números complejos. El programa de 2016 dice lo mismo.

### Instrucciones de emergencia

- **Frecuencia:** un problema en los 17 finales del Plan 2010 (2010-1 a 2014-1) y en los 41 del Plan 2016 (2016-2 a 2026-1). En el Plan 2010, 8 de 17 dan datos en un diagrama de Argand y 4 de 17 piden raíces  $n$ -ésimas; casi todos terminan en una potencia o raíz de la incógnita.
- **Tiempo:** de 2.5 a 3 horas para esta unidad.
- **Ruta corta:**
  1. Lee la sección 3.1 y ten a la mano la tabla de ángulos notables de la sección 1B.1 (20 min).
  2. Sigue el ejemplo 3.4 tapando la resolución.
  3. Resuelve los ejercicios 3.5.4, 3.5.5 y 3.5.6 con cronómetro (15 min cada uno).

### 3.1 Conceptos y expresiones

**Las tres formas.** Un número complejo se escribe de tres maneras equivalentes:

$$z = a + bi, \quad z = r \operatorname{cis} \theta = r(\cos \theta + i \sin \theta), \quad z = re^{i\theta}.$$

Son las formas binómica, polar y exponencial.  $a = \operatorname{Re} z$  es la parte real,  $b = \operatorname{Im} z$  la parte imaginaria,  $r = |z| \geq 0$  el *módulo* y  $\theta$  el *argumento*. En los exámenes el argumento de la forma polar se da en grados y el de la exponencial en radianes:  $2 \operatorname{cis} 60^\circ = 2e^{\frac{\pi}{3}i}$ .

#### Conversiones.

- Binómica a polar:  $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ ;  $\theta$  es el ángulo cuyo coseno es  $a/r$  y cuyo seno es  $b/r$ . Se ubica el cuadrante por los signos de  $a$  y  $b$  y se usa el ángulo de referencia, cuya tangente es  $|b/a|$ .
- Polar a binómica:  $a = r \cos \theta$ ,  $b = r \sin \theta$ , con los valores exactos de la tabla de ángulos notables (sección 1B.1).
- Polar a exponencial: el mismo  $r$  y  $\theta$  en radianes:  $180^\circ = \pi$ ,  $60^\circ = \frac{\pi}{3}$ ,  $45^\circ = \frac{\pi}{4}$ ,  $30^\circ = \frac{\pi}{6}$ .

**Valores que conviene saber de memoria.**

$$1 = \operatorname{cis} 0^\circ, \quad i = \operatorname{cis} 90^\circ, \quad -1 = \operatorname{cis} 180^\circ, \quad -i = \operatorname{cis} 270^\circ,$$

$$1 + i = \sqrt{2} \operatorname{cis} 45^\circ, \quad 1 + \sqrt{3}i = 2 \operatorname{cis} 60^\circ, \quad \sqrt{3} + i = 2 \operatorname{cis} 30^\circ.$$

**Potencias de  $i$ .** Se repiten cada cuatro:  $i^1 = i$ ,  $i^2 = -1$ ,  $i^3 = -i$ ,  $i^4 = 1$ . Para  $i^n$  se usa el residuo de dividir  $n$  entre 4:  $i^{17} = i^1 = i$ ,  $i^{20} = i^0 = 1$ ,  $i^7 = i^3 = -i$ .

**Ángulos fuera de  $[0^\circ, 360^\circ)$ .** El argumento no es único:  $r \operatorname{cis} \theta = r \operatorname{cis}(\theta + 360^\circ k)$  para todo entero  $k$ . Se reduce restando vueltas completas:  $\operatorname{cis} 1140^\circ = \operatorname{cis}(1140^\circ - 3 \cdot 360^\circ) =$

**Ejercicio propuesto 3.6.6**

Adaptado de: 2ª final 2019-2, problema 3.

Sean  $z_1 = -\sqrt{2} + \sqrt{2}i$ ,  $z_2 = 8e^{\frac{\pi}{4}i}$ ,  $z_3 = 3 \operatorname{cis} 180^\circ$  y  $z_4 = -3 + 4i$ . Obtenga  $z \in \mathbb{C}$  que satisfice

$$z^{3/2} = \frac{(z_3 - \bar{z}_4)^3}{z_1 z_2}.$$

**Resultado:**  $z^{3/2} = 4 \operatorname{cis} 90^\circ$ ;  $z = 2\sqrt[3]{2} \operatorname{cis} 60^\circ$ ,  $2\sqrt[3]{2} \operatorname{cis} 180^\circ$ ,  $2\sqrt[3]{2} \operatorname{cis} 300^\circ$ .

→ Resolución en el Apéndice E, p. 104.

**3.7 Errores frecuentes**

- **Sumar en forma polar.**  $2 \operatorname{cis} 30^\circ + 2 \operatorname{cis} 60^\circ$  no es  $4 \operatorname{cis} 90^\circ$ . Las sumas y restas siempre en binómica.
- **Equivocar el cuadrante.** La tangente solo da el ángulo de referencia:  $-1 - i$  está en el tercer cuadrante, su argumento es  $225^\circ$ , no  $45^\circ$ .
- **Leer mal el ángulo del diagrama.** Un ángulo marcado desde el eje imaginario o desde el semieje real negativo hay que convertirlo:  $45^\circ$  desde el semieje imaginario positivo hacia la izquierda es  $135^\circ$ .
- **Olvidar raíces.**  $w^n = c$  tiene  $n$  soluciones. Con una sola, el problema queda incompleto.
- **Dividir el argumento sin sumar vueltas.** Las raíces son  $\frac{\Phi+360^\circ k}{n}$ , no solo  $\frac{\Phi}{n}$ .
- **Exponente racional al revés.**  $w^{3/2} = c$  da  $w = \sqrt[3]{c^2}$  (tres valores), no  $w = \sqrt{c^3}$ .
- **Conjugar mal.**  $\overline{r \operatorname{cis} \theta} = r \operatorname{cis}(-\theta)$ : cambia el signo del argumento, no el del módulo.
- **Potencias de  $i$ .**  $i^{17} = i$ , no  $-i$ : el residuo de 17 entre 4 es 1.

**3.8 Formulario de emergencia de la unidad**

- $z = a + bi = r \operatorname{cis} \theta = re^{i\theta}$ ;  $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ ;  $a = r \cos \theta$ ,  $b = r \sin \theta$ .
- $i^n$  depende del residuo de  $n$  entre 4;  $\operatorname{cis} \theta = \operatorname{cis}(\theta + 360^\circ k)$ ;  $-r \operatorname{cis} \theta = r \operatorname{cis}(\theta + 180^\circ)$ .
- $\bar{z} = a - bi = r \operatorname{cis}(-\theta)$ ;  $z\bar{z} = |z|^2$ ;  $|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$ .
- $r_1 \operatorname{cis} \theta_1 \cdot r_2 \operatorname{cis} \theta_2 = r_1 r_2 \operatorname{cis}(\theta_1 + \theta_2)$ ;  $\frac{r_1 \operatorname{cis} \theta_1}{r_2 \operatorname{cis} \theta_2} = \frac{r_1}{r_2} \operatorname{cis}(\theta_1 - \theta_2)$ .
- $(r \operatorname{cis} \theta)^n = r^n \operatorname{cis} n\theta$ .
- $\sqrt[n]{r \operatorname{cis} \theta} = \sqrt[n]{r} \operatorname{cis} \frac{\theta+360^\circ k}{n}$ ,  $k = 0, \dots, n-1$ .
- $w^{p/q} = c \Rightarrow w = \sqrt[q]{c^q}$ .
- $a + bi = c + di$  si y solo si  $a = c$  y  $b = d$ .
- $1 + i = \sqrt{2} \operatorname{cis} 45^\circ$ ;  $1 + \sqrt{3}i = 2 \operatorname{cis} 60^\circ$ ;  $\sqrt{3} + i = 2 \operatorname{cis} 30^\circ$ .

**3.9 Procedimiento recomendado en el examen**

1. Escribe cada dato en una línea propia y redúcelo: potencias de  $i$ , vueltas completas, coeficientes negativos.
2. Sumas y restas en binómica; luego todo a polar con el argumento en grados.
3. Despeja la potencia de la incógnita y deja el lado conocido como  $R \operatorname{cis} \Phi$ .
4. Saca las  $n$  raíces y escríbelas en una lista  $w_0, \dots, w_{n-1}$ , en la forma que pide el enunciado.
5. Si quedan 5 minutos, eleva  $w_0$  a la  $n$  para comprobar.

| El enunciado dice...                                                                                 | Procedimiento (sección)                                     |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------|
| «Obtener los números $w \in \mathbb{C}$ que satisfacen $w^3 \dots = \dots$ », datos en varias formas | Una sola forma (3.3.1), simplificar (3.3.2), raíces (3.3.3) |
| « $z_1$ y $z_2$ están en el diagrama de Argand»                                                      | Leer módulo y argumento de la figura (3.3.1)                |
| $w^{3/2}$ , $z^{4/3}$ , $x^{2/3}$ en la ecuación                                                     | Exponente racional (3.3.3)                                  |
| «Determinar $x, y \in \mathbb{R}$ », «los valores de $a$ y $b$ »                                     | Igualdad de complejos (3.3.4)                               |
| $\bar{z}$ , $ z $ o «el módulo sea igual a...» con incógnita                                         | Escribir $z = a + bi$ (3.3.5)                               |
| «Una de las raíces cúbicas de $z$ es...»                                                             | Repartir cada $360^\circ/n$ (3.3.3)                         |
| «En forma polar», «en forma binómica»                                                                | Convertir el resultado al final (3.1)                       |

**3.3 Procedimientos****3.3.1 Pasar los datos a una sola forma**

1. Reduce las potencias de  $i$  con el residuo entre 4 y los argumentos a  $[0^\circ, 360^\circ)$ .
2. Si hay sumas o restas, hazlas en forma binómica: convierte a binómica los números que van a sumarse.
3. Todo lo que se multiplica, divide o eleva a potencia, pásalo a forma polar con el argumento en grados.
4. Diagrama de Argand: lee el módulo (la longitud) o las coordenadas, y convierte el ángulo marcado al argumento desde el semieje real positivo. Por ejemplo, un segmento de longitud 8 que forma  $45^\circ$  con el semieje imaginario positivo, hacia la izquierda, es  $8 \operatorname{cis} 135^\circ$ .

**3.3.2 Simplificar el lado conocido**

1. Calcula primero los paréntesis (sumas y restas en binómica) y pasa cada resultado a polar.
2. Multiplica módulos y suma argumentos; divide módulos y resta argumentos; con De Moivre, eleva el módulo y multiplica el argumento.
3. Reduce el argumento final a  $[0^\circ, 360^\circ)$ . El lado conocido debe quedar como  $c = R \operatorname{cis} \Phi$ .

**3.3.3 Despejar la potencia y sacar las raíces**

1. Despeja la potencia de la incógnita:  $w^n = R \operatorname{cis} \Phi$ .
2. Si el exponente es racional,  $w^{p/q} = c$ , cambia a  $w^p = c^q$  (eleva  $c$  a la  $q$  con De Moivre).
3. Raíces:  $w_k = \sqrt[n]{R} \operatorname{cis} \frac{\Phi+360^\circ k}{n}$ ,  $k = 0, \dots, n-1$ . Basta con calcular  $\frac{\Phi}{n}$  y sumar  $\frac{360^\circ}{n}$  cada vez.
4. Si te dan una raíz  $w_0$  y piden las demás, solo suma  $\frac{360^\circ}{n}$  al argumento; el número original es  $w_0^n$ .
5. Escribe el resultado en la forma que piden. Si te piden graficarlo, dibuja la circunferencia de radio  $\sqrt[n]{R}$  y los  $n$  puntos.

1.  $z$  aparece sin potencias: se despeja como en los reales,  $z = (3 + 3i)^2 \left(\frac{1}{9} \text{ cis } 300^\circ\right) \text{ cis } 30^\circ$ .
2.  $(3 + 3i)^2 = 9 + 18i + 9i^2 = 18i = 18 \text{ cis } 90^\circ$ .
3.  $z = 18 \cdot \frac{1}{9} \text{ cis}(90^\circ + 300^\circ + 30^\circ) = 2 \text{ cis } 420^\circ = 2 \text{ cis } 60^\circ$ .
4. **Resultado:**  $z = 2 \text{ cis } 60^\circ = 1 + \sqrt{3}i$ .

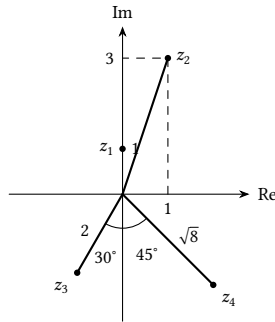
### 3.6 Ejercicios propuestos

Resuélvelos sin ver la solución. Las resoluciones completas están en el **Apéndice E, sección E.3**.

#### Ejercicio propuesto 3.6.1

Adaptado de: 1er final 2014-1, tipo A, problema 2.

Los números  $z_1, z_2, z_3, z_4$  están en el diagrama:  $z_1$  sobre el eje imaginario a altura 1;  $z_2$  en el punto (1, 3);  $z_3$  con módulo 2 a  $30^\circ$  del semieje imaginario negativo, hacia la izquierda;  $z_4$  con módulo  $\sqrt{8}$  a  $45^\circ$  del semieje imaginario negativo, hacia la derecha. Obtenga los números  $z \in \mathbb{C}$  que satisfacen  $z^4 z_3^3 = \frac{2z_2 - z_4}{z_1}$  y grafíquelos.



**Resultado:**  $z^4 = 1$ :  $z = 1, i, -1, -i$  (un cuadrado inscrito en la circunferencia unitaria).

→ Resolución en el Apéndice E, p. 103.

#### Ejercicio propuesto 3.6.2

Adaptado de: 1er final 2010-2, turno matutino, tipo A, problema 2.

Obtenga los números  $w \in \mathbb{C}$  que satisfacen

$$w^{3/2} z_1 = \frac{\sqrt{2}(z_2 - \bar{z}_3)}{z_4 i^{17}},$$

donde  $z_1 = 1 + i, z_2 = 3 \text{ cis } 180^\circ, z_3 = -3 - 6i$  y  $z_4 = 2e^{\frac{3}{4}\pi i}$ .

**Resultado:**  $w^{3/2} = 3$ :  $w = \sqrt[3]{9} \text{ cis } 0^\circ, \sqrt[3]{9} \text{ cis } 120^\circ, \sqrt[3]{9} \text{ cis } 240^\circ$ .

→ Resolución en el Apéndice E, p. 103.

2. Lado derecho:  $6 + 12i + 2yi + 4yi^2 = (6 - 4y) + (12 + 2y)i$ .
3. Partes reales:  $3x - 8 = 6 - 4y$ . Partes imaginarias:  $2x + 12 = 12 + 2y$ , es decir,  $x = y$ .
4. Sustituyendo:  $3x - 8 = 6 - 4x \Rightarrow 7x = 14$ .
5. **Resultado:**  $x = 2, y = 2$ .

#### Ejercicio 3.5.2 · Módulo con un parámetro

Adaptado de: 1er final 2013-1, tipo A, problema 2.

Determine el o los valores de  $x \in \mathbb{R}$  para que el módulo del número complejo  $z = \frac{x+i}{1+i}$  sea igual a  $\sqrt{5}$ .

**Resolución.**

1. No hace falta dividir:  $|z| = \frac{|x+i|}{|1+i|} = \frac{\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{2}}$ .
2. Condición:  $\frac{\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{2}} = \sqrt{5} \Rightarrow x^2 + 1 = 10 \Rightarrow x^2 = 9$ .
3. **Resultado:**  $x = 3$  o  $x = -3$ .
4. Comprobación con  $x = 3$ :  $\frac{3+i}{1+i} = \frac{(3+i)(1-i)}{2} = \frac{4-2i}{2} = 2 - i$ , y  $|2 - i| = \sqrt{5}$ .

#### Ejercicio 3.5.3 · Ecuación con conjugado y potencia

Adaptado de: 2º final 2013-1, tipo A, problema 2.

Determine el o los valores de  $z \in \mathbb{C}$  que satisfacen

$$z^2 = \frac{(z_3 - \bar{z}_4)^3}{z_1 + z_2},$$

donde  $z_1 = \text{cis } 45^\circ, z_2 = 2\sqrt{2} + 2\sqrt{2}i, z_3 = 5e^{\pi i}$  y  $z_4 = -5 + 2i$ .

**Resolución.**

1. Numerador:  $z_3 = 5 \text{ cis } 180^\circ = -5$  y  $\bar{z}_4 = -5 - 2i$ , así que  $z_3 - \bar{z}_4 = 2i = 2 \text{ cis } 90^\circ$  y  $(2i)^3 = 8 \text{ cis } 270^\circ$ .
2. Denominador (suma en binómica):  $z_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$ , y

$$z_1 + z_2 = \frac{5\sqrt{2}}{2} + \frac{5\sqrt{2}}{2}i = 5 \text{ cis } 45^\circ,$$

pues  $r = \sqrt{2 \cdot \frac{50}{4}} = 5$  y las dos partes son iguales y positivas.

3.  $z^2 = \frac{8 \text{ cis } 270^\circ}{5 \text{ cis } 45^\circ} = \frac{8}{5} \text{ cis } 225^\circ$ .
4. Raíces cuadradas:  $\sqrt{\frac{8}{5}} = \frac{2\sqrt{10}}{5}$  y argumentos  $\frac{225^\circ + 360^\circ k}{2}, k = 0, 1$ .
5. **Resultado:**  $z_0 = \frac{2\sqrt{10}}{5} \text{ cis } 112.5^\circ, z_1 = \frac{2\sqrt{10}}{5} \text{ cis } 292.5^\circ$ .

#### Ejercicio 3.5.4 · Datos en el diagrama de Argand: raíces cuartas

Adaptado de: 2º final 2010-2, problema 2.

Determine los valores de  $w \in \mathbb{C}$  que satisfacen

$$\frac{w^4}{z_3} = (z_1 - z_2)^3, \quad z_3 = 2e^{\frac{\pi}{3}i},$$

**Base** ( $n = 2$ ). Izquierdo:  $1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ . Derecho:  $\frac{1}{2}$ . Se cumple.

**Hipótesis** ( $n = k \geq 2$ ).  $\left(1 - \frac{1}{2}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{k}\right) = \frac{1}{k}$ .

**Tesis** ( $n = k + 1$ ).  $\left(1 - \frac{1}{2}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{k}\right) \left(1 - \frac{1}{k+1}\right) = \frac{1}{k+1}$ .

**Paso inductivo.**

$$\left(1 - \frac{1}{2}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{k}\right) \left(1 - \frac{1}{k+1}\right) = \frac{1}{k} \cdot \frac{k}{k+1} = \frac{1}{k+1}.$$

**Conclusión:** por el principio de inducción matemática, la igualdad se cumple para todo natural  $n \geq 2$ .

### Ejercicio 2.5.5 · Suma con potencias de 2

Adaptado de: 1er final 2019-2, tipo C, problema 2.

Demuestre por inducción matemática que, para todo natural  $n \geq 2$ ,

$$P(n): 2 + 3 \cdot 2^1 + 4 \cdot 2^2 + \cdots + n(2^{n-2}) = (n-1)(2^{n-1}).$$

**Resolución.**

**Proposición.** Término general  $n 2^{n-2}$  (con  $n = 2$  da  $2 \cdot 2^0 = 2$ ); el sumando nuevo es  $(k+1)2^{k-1}$ . La base es  $n = 2$ .

**Base** ( $n = 2$ ). Izquierdo: 2. Derecho:  $(2-1)2^1 = 2$ . Se cumple.

**Hipótesis** ( $n = k \geq 2$ ).  $2 + 3 \cdot 2 + \cdots + k 2^{k-2} = (k-1)2^{k-1}$ .

**Tesis** ( $n = k + 1$ ).  $2 + 3 \cdot 2 + \cdots + (k+1)2^{k-1} = k 2^k$ .

**Paso inductivo.** Se saca como factor la potencia común  $2^{k-1}$ :

$$(k-1)2^{k-1} + (k+1)2^{k-1} = 2^{k-1}(k-1+k+1) = 2^{k-1} \cdot 2k = k 2^k.$$

**Conclusión:** por el principio de inducción matemática,  $P(n)$  se cumple para todo natural  $n \geq 2$ .

### Ejercicio 2.5.6 · Desigualdad racional con mayor o igual

Adaptado de: 2º final 2013-2, tipo A, problema 1.

Obtenga los valores de  $x \in \mathbb{R}$  que satisfacen  $\frac{3x+2}{2x-12} \geq 1$ .

**Resolución.**

1. Todo a un lado:  $\frac{3x+2}{2x-12} - 1 \geq 0 \Rightarrow \frac{3x+2-2x+12}{2x-12} \geq 0 \Rightarrow \frac{x+14}{2x-12} \geq 0$ .

2. Puntos críticos:  $x = -14$  (numerador) y  $x = 6$  (denominador).

3. Tabla de signos:

|           | $x < -14$ | $-14 < x < 6$ | $x > 6$ |
|-----------|-----------|---------------|---------|
| $x + 14$  | −         | +             | +       |
| $2x - 12$ | −         | −             | +       |
| cociente  | +         | −             | +       |

4. Cociente positivo o cero: entra  $x = -14$  (anula el numerador y la desigualdad admite la igualdad);  $x = 6$  no, porque anula el denominador.

$$5. x^2 + x - 6 = (x+3)(x-2).$$

$$6. b) P(x) = (x-1)(x+1)(x-2)(x+3). \text{ Comprobación: producto de raíces } 1 \cdot (-1) \cdot 2 \cdot (-3) = 6 = (-1)^4 a_0.$$

### Ejercicio 4.5.2 · Coeficientes a partir de tres puntos de la gráfica

Adaptado de: 1er final 2010-2, turno vespertino, problema 3.

La gráfica del polinomio  $p(x) = Ax^3 + Bx^2 + Cx + A$  contiene a los puntos  $(-1, -6)$ ,  $(0, 2)$  y  $(1, 0)$ . Determine:

■ a) los valores de  $A, B, C \in \mathbb{R}$ ;

■ b) todas las raíces de  $p(x)$ .

**Resolución.**

$$1. p(0) = A = 2.$$

$$2. p(1) = A + B + C + A = 0 \Rightarrow B + C = -4.$$

$$3. p(-1) = -A + B - C + A = -6 \Rightarrow B - C = -6.$$

$$4. \text{ Sumando: } 2B = -10, B = -5; C = -4 + 5 = 1. \text{ a) } A = 2, B = -5, C = 1.$$

$$5. p(x) = 2x^3 - 5x^2 + x + 2. \text{ El punto } (1, 0) \text{ dice que } x = 1 \text{ es raíz:}$$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 2 & -5 & 1 & 2 \\ 1 & & 2 & -3 & -2 \\ \hline & 2 & -3 & -2 & 0 \end{array}$$

$$6. 2x^2 - 3x - 2 = (2x+1)(x-2).$$

$$7. b) \text{ Raíces: } 1, 2, -\frac{1}{2}.$$

### Ejercicio 4.5.3 · Coeficientes complejos con una raíz dada

Adaptado de: 2º final 2010-2, problema 3.

Para el polinomio

$$P(x) = x^5 + (-2+i)x^4 + (-6-i)x^3 + (8-7i)x^2 + (5+i)x + (-6+6i),$$

determine sus raíces, si una de ellas es  $1-i$ , y represéntelo como producto de sus factores lineales.

**Resolución.**

1. Hay coeficientes complejos:  $1+i$  **no** tiene por qué ser raíz. Se divide solo entre  $x-(1-i)$ :

$$\begin{array}{r|rrrrrr} & 1 & -2+i & -6-i & 8-7i & 5+i & -6+6i \\ 1-i & & 1-i & -1+i & -7+7i & 1-i & 6-6i \\ \hline & 1 & -1 & -7 & 1 & 6 & 0 \end{array}$$

Por ejemplo, en la segunda columna:  $(1-i)(1) = 1-i$  y  $(-2+i) + (1-i) = -1$ .

2. El cociente es real:  $x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 6$ . Candidatos racionales:  $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$ .

3.  $x = 1$  y luego  $x = -1$ :

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & -1 & -7 & 1 & 6 \\ 1 & & 1 & 0 & -7 & -6 \\ -1 & 1 & 0 & -7 & -6 & 0 \\ & & -1 & 1 & 6 & \\ \hline & 1 & -1 & -6 & 0 & \end{array}$$

## 2.6 Ejercicios propuestos

Resuélvelos sin ver la solución. Las resoluciones completas están en el **Apéndice E, sección E.2**.

### Ejercicio propuesto 2.6.1

*Adaptado de: 1er final 2014-1, tipo A, problema 1.*

Demuestre por inducción matemática que

$$2 + 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{2}{2^{n-1}} = 2 \left[ \frac{2^n - 1}{2^{n-1}} \right], \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

**Resultado:** la base ( $2 = 2$ ) y el paso inductivo se cumplen:  $2 \left[ \frac{2^k - 1}{2^{k-1}} \right] + \frac{2}{2^k} = 2 \left[ \frac{2^{k+1} - 1}{2^k} \right]$ .

→ Resolución en el Apéndice E, p. 102.

### Ejercicio propuesto 2.6.2

*Adaptado de: 1er final 2013-1, tipo A, problema 1.*

Demuestre por inducción matemática que, para todo  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$a + (a + d) + (a + 2d) + \cdots + [a + (n - 1)d] = \frac{1}{2}n[2a + (n - 1)d].$$

**Resultado:** la base ( $a = a$ ) y el paso inductivo se cumplen:  $\frac{k}{2}[2a + (k - 1)d] + a + kd = \frac{k+1}{2}[2a + kd]$ .

→ Resolución en el Apéndice E, p. 102.

### Ejercicio propuesto 2.6.3

*Adaptado de: 1er final 2020-2, tipo A, problema 2.*

Demuestre por inducción matemática que, para todo  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$P(n) : \frac{1}{5} + \frac{1}{25} + \frac{1}{125} + \cdots + \frac{1}{5^n} = -\frac{5}{4} \left( \frac{1}{5} \right)^{n+1} + \frac{1}{4}.$$

**Resultado:** la base ( $\frac{1}{5} = \frac{1}{5}$ ) y el paso inductivo se cumplen:  $\frac{1}{4} - \frac{1}{4 \cdot 5^k} + \frac{1}{5^{k+1}} = \frac{1}{4} - \frac{1}{4 \cdot 5^{k+1}}$ .

→ Resolución en el Apéndice E, p. 102.

### Ejercicio propuesto 2.6.4

*Adaptado de: 1er final 2010-2, turno matutino, tipo A, problema 1.*

Determine el conjunto solución de la desigualdad  $5 - \frac{x}{4} > -6$ .

**Resultado:**  $x \in (-\infty, 44)$ .

→ Resolución en el Apéndice E, p. 102.

### Ejercicio propuesto 2.6.5

*Adaptado de: 2º final 2014-1, tipo B, problema 1.*

Resuelva la desigualdad  $\left| \frac{3x-2}{5x+1} \right| > 3$ .

4. Calcula  $a$  con un punto de la gráfica que no sea raíz:  $p(x_0) = y_0$ .
5. Comprueba el signo de  $a$  con el comportamiento de los extremos: si la curva sube a la derecha,  $a > 0$ .

### 4.3.7 Polinomios con potencias múltiplos de una

Si solo aparecen  $x^{2k}$ ,  $x^k$  y constante ( $x^8 + x^4 - 6$ ,  $x^6 + 8x^3 + 12$ ):

1. Sustituye  $u = x^k$ : queda una cuadrática en  $u$ .
2. Resuelve para  $u$  (factorización o fórmula general).
3. Regresa:  $x^k = u_1$  y  $x^k = u_2$ . Cada ecuación tiene  $k$  raíces, que son las raíces  $k$ -ésimas de  $u$  (Unidad 3).

### 4.3.8 Cota superior de las raíces

1. Con  $a_n > 0$ , divide sintéticamente entre  $x - c$  para  $c = 1, 2, 3, \dots$
2. El primer  $c$  cuyo renglón de resultados (cociente y residuo) no tenga números negativos es una cota superior: ninguna raíz real es mayor que  $c$ .
3. Para la cota inferior, aplica lo mismo a  $p(-x)$  y cambia el signo.

## 4.4 Ejemplo resuelto

2.9 Procedimiento recomendado en el examen

- 1. **Inducción:** escribe los rótulos (Proposición, Base, Hipótesis, Tesis, Paso inductivo) antes de calcular; la tesis escrita orienta el álgebra.
- 2. En el paso inductivo, busca primero un **factor común**; si no lo hay, desarrolla los dos lados y compáralos.
- 3. Cierra con la conclusión completa: «por el principio de inducción matemática...».
- 4. **Desigualdad:** todo a un lado, una sola fracción, factores lineales, puntos críticos, tabla de signos.
- 5. Con valor absoluto de un cociente, o de un lado contra otro, eleva al cuadrado y factoriza como diferencia de cuadrados.
- 6. Comprueba con un valor de prueba de cada intervalo y escribe el resultado con intervalos.

Si no se termina el paso inductivo, la base, la hipótesis y la tesis bien escritas ya valen parte del problema.

| Si el enunciado dice...                                                                     | Se pide...                                 | Procedimiento |
|---------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------|---------------|
| «regla de los signos de Descartes»,<br>«posibilidades en que pueden presentarse las raíces» | tabla de posibilidades                     | 4.3.3         |
| «posibles raíces racionales»                                                                | lista $\pm p/q$                            | 4.3.2         |
| una gráfica y «el polinomio de menor grado»                                                 | raíces, multiplicidades y $a_n$            | 4.3.6         |
| $x^3 + x^4 - 6, x^6 + 8x^3 + 12$ (solo potencias múltiplos de una)                          | cambio de variable $u = x^k$               | 4.3.7         |
| «una cota superior de las raíces»                                                           | división sintética con resultados $\geq 0$ | 4.3.8         |
| $f(x) = p(x)q(x)$                                                                           | raíces de cada factor por separado         | 4.3.2         |

4.3 Procedimientos

4.3.1 División sintética

Para dividir  $p(x)$  entre  $x - c$ :

- 1. Escribe en un renglón **todos** los coeficientes, de la potencia mayor a la menor, con cero en las potencias que faltan. Pon  $c$  a la izquierda.
- 2. Baja el primer coeficiente al renglón de resultados.
- 3. Multiplica ese resultado por  $c$ , escríbelo bajo el siguiente coeficiente y suma. Repite hasta el final.
- 4. El último número es el residuo,  $p(c)$ . Los demás son los coeficientes del cociente, que tiene un grado menos.
- 5. Si el residuo es 0,  $c$  es raíz: sigue trabajando con el cociente (polinomio *deflactado*).

Por ejemplo,  $x^3 - 6x^2 + 11x - 6$  entre  $x - 1$ :

|   |   |    |    |    |
|---|---|----|----|----|
|   | 1 | -6 | 11 | -6 |
| 1 |   | 1  | -5 | 6  |
|   | 1 | -5 | 6  | 0  |

$x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = (x - 1)(x^2 - 5x + 6).$

4.3.2 Posibles raíces racionales y raíces reales

- 1. Si hay potencias de  $x$  en todos los términos, factoriza  $x^k$ :  $x = 0$  es raíz de multiplicidad  $k$ .
- 2. Si los coeficientes son fracciones, multiplica por el común denominador; las raíces no cambian.
- 3. Haz la lista  $\pm \frac{\text{divisores de } a_0}{\text{divisores de } a_n}$ .
- 4. Prueba primero los más pequeños ( $\pm 1, \pm 2$ ) con división sintética. Cada vez que uno sea raíz, sigue con el cociente.
- 5. Cuando el cociente sea de grado 2, usa la fórmula general:  $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ .

$\text{cis } 60^\circ; e^{2\pi i} = 1; \text{cis}(-60^\circ) = \text{cis } 300^\circ$ . Un coeficiente negativo se corrige sumando  $180^\circ$ :  
 $-1 \text{ cis } 180^\circ = 1 \text{ cis } 0^\circ = 1$ .

**Conjugado y módulo.**  $\bar{z} = a - bi = r \text{ cis}(-\theta)$ . Propiedades:

$$\overline{z_1 \pm z_2} = \bar{z}_1 \pm \bar{z}_2, \quad \overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2, \quad z \bar{z} = |z|^2,$$

$$|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|, \quad \left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}.$$

**Operaciones.** La suma y la resta se hacen en forma binómica. El producto, el cociente y las potencias, en forma polar o exponencial:

$$r_1 \text{ cis } \theta_1 \cdot r_2 \text{ cis } \theta_2 = r_1 r_2 \text{ cis}(\theta_1 + \theta_2), \quad \frac{r_1 \text{ cis } \theta_1}{r_2 \text{ cis } \theta_2} = \frac{r_1}{r_2} \text{ cis}(\theta_1 - \theta_2),$$

$$(r \text{ cis } \theta)^n = r^n \text{ cis } n\theta \quad (\text{De Moivre}).$$

El cociente en forma binómica se hace multiplicando por el conjugado del denominador:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \bar{z}_2}{|z_2|^2}.$$

**Raíces  $n$ -ésimas.** Todo  $z = r \text{ cis } \theta \neq 0$  tiene exactamente  $n$  raíces  $n$ -ésimas distintas:

$$w_k = \sqrt[n]{r} \text{ cis } \frac{\theta + 360^\circ k}{n}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1.$$

Todas tienen el mismo módulo  $\sqrt[n]{r}$  (raíz real positiva) y están repartidas cada  $\frac{360^\circ}{n}$  sobre una circunferencia: forman un polígono regular de  $n$  lados centrado en el origen.

**Exponente racional.** En los enunciados aparece  $w^{p/q} = c$ , que se entiende como  $(\sqrt[q]{w})^p = c$ . Para despejar se eleva a la  $q$  y luego se sacan las raíces  $p$ -ésimas:

$$w^{p/q} = c \implies w^p = c^q \implies w = \sqrt[p]{c^q} \quad (p \text{ valores}).$$

Por ejemplo,  $w^{2/3} = c$  da  $w = \sqrt{c^3}$ , dos valores;  $w^{3/2} = c$  da  $w = \sqrt[3]{c^2}$ , tres valores.

**Igualdad de complejos.** En forma binómica,  $a + bi = c + di$  si y solo si  $a = c$  y  $b = d$ : una ecuación compleja con incógnitas *reales* da dos ecuaciones reales. En forma polar,  $r_1 \text{ cis } \theta_1 = r_2 \text{ cis } \theta_2$  si y solo si  $r_1 = r_2$  y  $\theta_1 = \theta_2 + 360^\circ k$ .

**Diagrama de Argand.** Es el plano con la parte real en el eje horizontal y la imaginaria en el vertical. Un número se puede dar por sus coordenadas  $(a, b)$  o por su módulo (la longitud del segmento) y un ángulo. Ese ángulo puede estar medido desde cualquier semieje: hay que convertirlo al argumento medido desde el semieje real positivo, en sentido contrario al de las manecillas del reloj.

### 3.2 Cómo reconocer el problema

## Unidad 4 · Polinomios: raíces, factores lineales y regla de los signos de Descartes

**Objetivo (programa de la asignatura).** El alumno usará y analizará los conceptos del álgebra de los polinomios y sus propiedades para obtener raíces. El programa de 2016 dice lo mismo (sin mencionar las raíces conjugadas, que sus exámenes sí usan).

### Instrucciones de emergencia

- **Frecuencia:** un problema completo en los 17 finales del Plan 2010 (2010-1 a 2014-1; es el problema 3) y en los 41 del Plan 2016 (2016-2 a 2026-1; es el problema 4). En el Plan 2010: raíz compleja dada, 7 de 17; coeficientes desconocidos a partir de raíces o puntos, 2; polinomio a partir de su gráfica, 2; regla de Descartes, 2; producto de dos polinomios, 2; polinomio bicuadrado con cota de raíces, 2.
- **Tiempo:** de 2 a 3 horas para esta unidad.
- **Ruta corta:**
  1. Lee las secciones 4.1 y 4.3.1 (división sintética, 20 min).
  2. Sigue el ejemplo 4.4 tapando la resolución.
  3. Resuelve los ejercicios 4.5.3, 4.5.6 y 4.5.7 con cronómetro (15 min cada uno).

### 4.1 Conceptos y expresiones

**Polinomio.** Un polinomio de grado  $n$  en  $x$  es

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0, \quad a_n \neq 0,$$

con coeficientes reales o complejos.  $a_n$  es el *coeficiente principal* y  $a_0$  el *término independiente*. Dos polinomios son iguales si tienen los mismos coeficientes en cada potencia.

**Raíz.** El número  $\alpha \in \mathbb{C}$  es raíz (o cero) de  $p$  si  $p(\alpha) = 0$ . En la gráfica de un polinomio con coeficientes reales, las raíces reales son los puntos donde la curva toca o corta el eje  $x$ .

**Algoritmo de la división.** Para  $p(x)$  y  $d(x) \neq 0$  existen polinomios únicos  $q(x)$  (cociente) y  $r(x)$  (residuo) tales que

$$p(x) = d(x)q(x) + r(x), \quad r = 0 \text{ o grado } r < \text{grado } d.$$

$p$  es divisible entre  $d$  si  $r(x) = 0$ .

**Teorema del residuo.** El residuo de dividir  $p(x)$  entre  $x - c$  es  $p(c)$ .

**Teorema del factor.**  $x - c$  es factor de  $p(x)$  si y solo si  $p(c) = 0$ .

**Teorema fundamental del álgebra.** Todo polinomio de grado  $n \geq 1$  tiene al menos una raíz en  $\mathbb{C}$ . En consecuencia, tiene exactamente  $n$  raíces, contando multiplicidades, y se escribe como producto de  $n$  factores lineales:

$$p(x) = a_n(x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \cdots (x - \alpha_n).$$

**Multiplicidad.**  $\alpha$  es raíz de multiplicidad  $k$  si  $(x - \alpha)^k$  divide a  $p$ , pero  $(x - \alpha)^{k+1}$  no. En la división sintética:  $\alpha$  da residuo cero  $k$  veces seguidas. En la gráfica de un polinomio real, una raíz de multiplicidad impar *cruza* el eje; una de multiplicidad par lo *toca* sin cruzarlo.

## 3.3.4 Igualdad de complejos con incógnitas reales

1. Pasa todo a forma binómica y desarrolla los productos (recuerda  $i^2 = -1$ ).
2. Separa: parte real del lado izquierdo igual a parte real del derecho; lo mismo con la imaginaria.
3. Resuelve el sistema de dos ecuaciones reales.

## 3.3.5 Ecuaciones con conjugado o con módulo

1. Si  $z$  aparece junto con  $\bar{z}$  o con  $|z|$ , no sirve sacar raíces: escribe  $z = a + bi$ ,  $\bar{z} = a - bi$ ,  $|z|^2 = a^2 + b^2$ .
2. Iguala partes reales e imaginarias y resuelve para  $a$  y  $b$ .
3. Si solo hay un módulo, usa  $|z_1/z_2| = |z_1|/|z_2|$  sin hacer la división.
4. Si  $z$  aparece en forma lineal (sin potencias), despégala como en una ecuación real.

## 3.4 Ejemplo resuelto

## Ejemplo resuelto · Raíces cúbicas con datos en varias formas

Adaptado de: 1er final 2013-2, tipo A, problema 2.

Obtenga los números  $w \in \mathbb{C}$  que satisfacen la ecuación

$$\frac{w^3(z_3 z_2)}{z_4} = z_1,$$

donde  $z_1 = -1 \text{ cis } 180^\circ$ ,  $z_2 = i^{20}$ ,  $z_3 = 2 \text{ cis } 1140^\circ$  y  $z_4 = 2e^{2\pi i}$ .

## Resolución.

1. Una sola forma (polar):
  - $z_1 = -1 \text{ cis } 180^\circ = -(-1) = 1 = \text{cis } 0^\circ$ ;
  - $z_2 = i^{20} = i^0 = 1$ , porque  $20 = 4 \cdot 5$ ;
  - $z_3 = 2 \text{ cis}(1140^\circ - 1080^\circ) = 2 \text{ cis } 60^\circ$ ;
  - $z_4 = 2e^{2\pi i} = 2 \text{ cis } 360^\circ = 2$ .
2. Despejar:  $w^3 = \frac{z_1 z_4}{z_3 z_2} = \frac{(1)(2)}{2 \text{ cis } 60^\circ} = \text{cis}(-60^\circ) = \text{cis } 300^\circ$ .
3. Raíces cúbicas:  $w_k = \sqrt[3]{1} \text{ cis } \frac{300^\circ + 360^\circ k}{3} = \text{cis}(100^\circ + 120^\circ k)$ .
4. **Resultado:**  $w_0 = \text{cis } 100^\circ$ ,  $w_1 = \text{cis } 220^\circ$ ,  $w_2 = \text{cis } 340^\circ$ .
5. Comprobación:  $w_0^3 = \text{cis } 300^\circ$ , y  $\text{cis } 300^\circ \cdot 2 \text{ cis } 60^\circ \cdot \frac{1}{2} = \text{cis } 360^\circ = 1 = z_1$ .

## 3.5 Ejercicios de examen (resueltos)

## Ejercicio 3.5.1 · Igualdad de complejos

Adaptado de: 2º final 2010-1, tipo A, problema 2.

Determine los valores  $x, y \in \mathbb{R}$  que satisfacen la ecuación

$$(3 + 2i)(x + 4i) = (6 + 2yi)(1 + 2i).$$

## Resolución.

1. Lado izquierdo:  $3x + 12i + 2xi + 8i^2 = (3x - 8) + (2x + 12)i$ .

## Ejercicio propuesto 3.6.3

Adaptado de: 1er final 2010-2, turno vespertino, problema 2.

Determine los números  $z \in \mathbb{C}$  que satisfacen

$$z^{4/3} = \frac{(i)^7 (2e^{\frac{\pi}{3}i}) + (-\sqrt{3} + 2i)}{-\text{cis } 270^\circ}.$$

**Resultado:**  $z^{4/3} = 1$ :  $z = 1, i, -1, -i$ .

→ Resolución en el Apéndice E, p. 103.

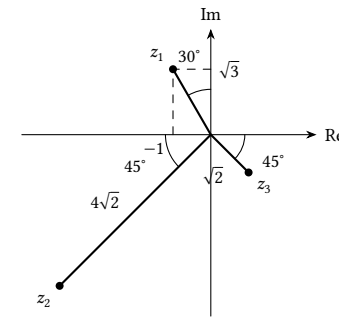
## Ejercicio propuesto 3.6.4

Adaptado de: 2º final 2013-2, tipo A, problema 2.

Determine los números  $w \in \mathbb{C}$  que satisfacen

$$w^{2/3} = \frac{6z_1 z_3}{[z_2 - 2\bar{z}_3](e^{\pi i})},$$

donde, en el diagrama,  $z_1$  es el punto  $(-1, \sqrt{3})$  (a  $30^\circ$  del semieje imaginario positivo);  $z_2$  tiene módulo  $4\sqrt{2}$  y forma  $45^\circ$  por debajo del semieje real negativo;  $z_3$  tiene módulo  $\sqrt{2}$  y forma  $45^\circ$  por debajo del semieje real positivo.



**Resultado:**  $w^{2/3} = 2 \text{ cis } 30^\circ$ :  $w = 2\sqrt{2} \text{ cis } 45^\circ = 2 + 2i$  y  $w = 2\sqrt{2} \text{ cis } 225^\circ = -2 - 2i$ .

→ Resolución en el Apéndice E, p. 104.

## Ejercicio propuesto 3.6.5

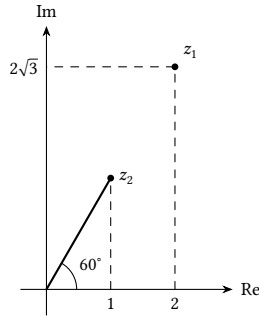
Adaptado de: 1er final 2017-1, tipo A, problema 3.

Sean  $z_1 = 20e^{\pi i}$ ,  $z_2 = 5 \text{ cis } 45^\circ$ ,  $z_3 = 8 + 8\sqrt{3}i$  y  $z_4 = 4 \text{ cis } 135^\circ$ . Obtenga, en forma polar, los valores de  $z \in \mathbb{C}$  que satisfacen  $z^4 z_1 = z_2 z_3 z_4$ .

**Resultado:**  $z^4 = 16 \text{ cis } 60^\circ$ :  $z = 2 \text{ cis } 15^\circ, 2 \text{ cis } 105^\circ, 2 \text{ cis } 195^\circ, 2 \text{ cis } 285^\circ$ .

→ Resolución en el Apéndice E, p. 104.

donde  $z_1$  y  $z_2$  están en el diagrama:  $z_1$  es el punto de coordenadas  $(2, 2\sqrt{3})$ ;  $z_2$  está sobre la recta que forma  $60^\circ$  con el semieje real positivo y su parte real es 1.



### Resolución.

1. Lectura:  $z_1 = 2 + 2\sqrt{3}i$ . Para  $z_2 = 1 + bi$ ,  $\tan 60^\circ = \frac{b}{1} \Rightarrow b = \sqrt{3}$ :  $z_2 = 1 + \sqrt{3}i$ .
2.  $z_1 - z_2 = 1 + \sqrt{3}i = 2 \text{ cis } 60^\circ$ ;  $(z_1 - z_2)^3 = 8 \text{ cis } 180^\circ$ .
3.  $z_3 = 2 \text{ cis } 60^\circ$ . Despejar:  $w^4 = 2 \text{ cis } 60^\circ \cdot 8 \text{ cis } 180^\circ = 16 \text{ cis } 240^\circ$ .
4. Raíces cuartas:  $\sqrt[4]{16} = 2$ , argumentos  $\frac{240^\circ + 360^\circ k}{4} = 60^\circ + 90^\circ k$ .
5. **Resultado:**  $w_0 = 2 \text{ cis } 60^\circ$ ,  $w_1 = 2 \text{ cis } 150^\circ$ ,  $w_2 = 2 \text{ cis } 240^\circ$ ,  $w_3 = 2 \text{ cis } 330^\circ$ : los vértices de un cuadrado inscrito en la circunferencia de radio 2.

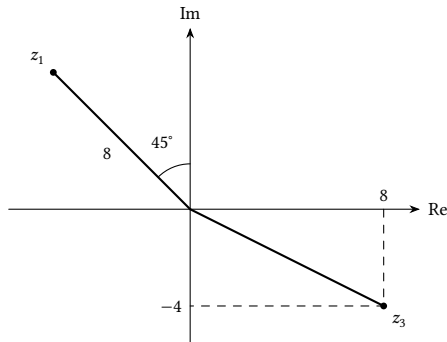
### Ejercicio 3.5.5 · Exponente racional con datos en el diagrama

Adaptado de: 2ª final 2014-1, tipo A, problema 2.

Obtenga el o los valores de  $x \in \mathbb{C}$  que satisfacen

$$x^{3/2} z_3 = 4\bar{z}_1 z_2 + 8x^{3/2}, \quad z_2 = e^{\frac{3}{2}\pi i},$$

donde  $z_1$  tiene módulo 8 y forma  $45^\circ$  con el semieje imaginario positivo, hacia la izquierda, y  $z_3$  es el punto  $(8, -4)$ .



### Resolución.

1. Lectura: el argumento de  $z_1$  es  $90^\circ + 45^\circ = 135^\circ$ :  $z_1 = 8 \text{ cis } 135^\circ$  y  $\bar{z}_1 = 8 \text{ cis } 225^\circ$ .  $z_3 = 8 - 4i$  y  $z_2 = \text{cis } 270^\circ$ .
2. Agrupar las  $x$ :  $x^{3/2}(z_3 - 8) = 4\bar{z}_1 z_2$ , con  $z_3 - 8 = -4i = 4 \text{ cis } 270^\circ$ .
3.  $x^{3/2} = \frac{4 \cdot 8 \text{ cis } 225^\circ \cdot \text{cis } 270^\circ}{4 \text{ cis } 270^\circ} = 8 \text{ cis } 225^\circ$ .
4. Exponente racional:  $x = \sqrt[3]{(8 \text{ cis } 225^\circ)^2} = \sqrt[3]{64 \text{ cis } 450^\circ} = \sqrt[3]{64 \text{ cis } 90^\circ}$ .
5. Raíces cúbicas: módulo 4, argumentos  $30^\circ + 120^\circ k$ .
6. **Resultado:**  $x_0 = 4 \text{ cis } 30^\circ$ ,  $x_1 = 4 \text{ cis } 150^\circ$ ,  $x_2 = 4 \text{ cis } 270^\circ = -4i$ .

### Ejercicio 3.5.6 · Las otras raíces cúbicas

Adaptado de: 2ª final 2018-2, problema 3.

Si  $z_1 = 2 \text{ cis } 60^\circ$  es una de las raíces cúbicas de  $z$ , determine las otras raíces cúbicas de  $z$  y expréselas en forma binómica y exponencial.

### Resolución.

1. Las tres raíces tienen el mismo módulo y están separadas  $\frac{360^\circ}{3} = 120^\circ$ .
2. Las otras dos:  $2 \text{ cis } 180^\circ$  y  $2 \text{ cis } 300^\circ$ .
3. Binómica:  $2 \text{ cis } 180^\circ = -2$ ;  $2 \text{ cis } 300^\circ = 2\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 1 - \sqrt{3}i$ .
4. Exponencial:  $2e^{\pi i}$  y  $2e^{\frac{5}{3}\pi i}$ .
5. **Resultado:**  $-2 = 2e^{\pi i}$  y  $1 - \sqrt{3}i = 2e^{\frac{5}{3}\pi i}$ . Además,  $z = z_1^3 = 8 \text{ cis } 180^\circ = -8$ .

### Ejercicio 3.5.7 · Igualdad con forma polar

Adaptado de: 1er final 2020-1, tipo C, problema 3.

Determine los valores reales de  $a$  y de  $b$  para que

$$\frac{a + 4i}{2 + bi} = 2 \text{ cis } 225^\circ.$$

### Resolución.

1.  $2 \text{ cis } 225^\circ = 2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = -\sqrt{2} - \sqrt{2}i$ .
2. Quitar el denominador:

$$a + 4i = (-\sqrt{2} - \sqrt{2}i)(2 + bi) = (-2\sqrt{2} + \sqrt{2}b) + (-2\sqrt{2} - \sqrt{2}b)i.$$

3. Partes imaginarias:  $4 = -2\sqrt{2} - \sqrt{2}b \Rightarrow b = \frac{-4 - 2\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = -2\sqrt{2} - 2$ .
4. Partes reales:  $a = -2\sqrt{2} + \sqrt{2}(-2\sqrt{2} - 2) = -2\sqrt{2} - 4 - 2\sqrt{2}$ .
5. **Resultado:**  $a = -4 - 4\sqrt{2}$ ,  $b = -2 - 2\sqrt{2}$ .

### Ejercicio 3.5.8 · Ecuación lineal en $z$

Adaptado de: 2ª final 2018-1, problema 3.

Determine  $z \in \mathbb{C}$  que resuelve la ecuación

$$2z = (3 + 3i)^2 \left(\frac{1}{9} \text{ cis } 300^\circ\right) \left(e^{\frac{\pi}{6}i}\right) + z.$$

### Resolución.