

1. a) $(a, b) \in W^\perp$ si $((a, b) | (1, 1)) = 2a + b = 0$: $W^\perp = \{\alpha(1, -2) | \alpha \in \mathbb{R}\}$. Con el producto usual habría salido $(1, -1)$.
2. b) $\vec{w} = \text{proy}_W(2, -1) = \frac{((2, -1)|(1, 1))}{((1, 1)|(1, 1))}(1, 1) = \frac{4-1}{2+1}(1, 1) = (1, 1)$.
3. $\vec{w}' = (2, -1) - (1, 1) = (1, -2) \in W^\perp$.

Ejercicio 4.6.4

← volver

1. La base ya es ortogonal: $(1, 2, 1) \cdot (1, -1, 1) = 1 - 2 + 1 = 0$.
2. $(\vec{v} | \vec{e}_1) = 4 + 4 - 3 = 5$, $(\vec{e}_1 | \vec{e}_1) = 6$; $(\vec{v} | \vec{e}_2) = 4 - 2 - 3 = -1$, $(\vec{e}_2 | \vec{e}_2) = 3$.
3. $\vec{p} = \frac{5}{6}(1, 2, 1) - \frac{1}{3}(1, -1, 1) = (\frac{1}{2}, 2, \frac{1}{2})$.
4. Comprobación: $\vec{v} - \vec{p} = (\frac{7}{2}, 0, -\frac{7}{2})$ es ortogonal a los dos vectores de la base.

Ejercicio 4.6.5

← volver

1. $\vec{e}_1 = 1$, $(1 | 1) = \int_{-1}^1 dx = 2$.
2. $(x | 1) = \int_{-1}^1 x dx = 0$: x ya es ortogonal a 1, así que $\vec{e}_2 = x$, con $(x | x) = \frac{2}{3}$.
3. $(x^2 | 1) = \frac{2}{3}$ y $(x^2 | x) = \int_{-1}^1 x^3 dx = 0$.
4. $\vec{e}_3 = x^2 - \frac{2/3}{2} \cdot 1 = x^2 - \frac{1}{3}$.
5. Comprobación: $(x^2 - \frac{1}{3} | 1) = \frac{2}{3} - \frac{2}{3} = 0$.

Ejercicio 4.6.6

← volver

1. $W = \text{gen}\{g\}$ con $g(x) = x^2 + x - 1$: $g(0) = -1$, $g(1) = 1$, $g(2) = 5$.
2. Para $p(x) = ax^2 + bx + c$: $p(0) = c$, $p(1) = a + b + c$, $p(2) = 4a + 2b + c$.
3. $(p | g) = -c + (a + b + c) + 5(4a + 2b + c) = 21a + 11b + 5c = 0$.
4. Dos parámetros libres: con $(a, b) = (5, 0)$, $c = -21$; con $(a, b) = (0, 5)$, $c = -11$.
 $W^\perp = \text{gen}\{5x^2 - 21, 5x - 11\}$, de dimensión $3 - 1 = 2$.

E.5 · Unidad 5 · Operadores lineales en espacios con producto interno: adjunto, tipos de operador y teorema espectral

Ejercicio 5.6.1

← volver

1. M es simétrica. $\det(M - \lambda I) = (5 - \lambda)(2 - \lambda) - 4 = \lambda^2 - 7\lambda + 6 = (\lambda - 6)(\lambda - 1)$.
2. $\lambda = 6$: $-x + 2y = 0$, $\hat{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}(2, 1)$. $\lambda = 1$: $4x + 2y = 0$, $\hat{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}(-1, 2)$.
3. $P_1 = \hat{e}_1 \hat{e}_1^T = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $P_2 = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$; $P_1 + P_2 = I$.
4. $S = 6P_1 + P_2$. Comprobación de la entrada $(1, 1)$: $\frac{24}{5} + \frac{1}{5} = 5$.

Ejercicio 5.6.2

← volver

1. $M = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$, simétrica; $\det(M - \lambda I) = (5 - \lambda)^2 - 4 = (\lambda - 7)(\lambda - 3)$.
2. $\lambda = 7$: $\hat{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1)$. $\lambda = 3$: $\hat{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1)$.
3. $P_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $P_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

3. b) $T^*(1 + i, 1 - i) = T(1 + i, 1 - i) = (2(1 + i) + i(1 - i), (1 - i) - i(1 + i)) = (3 + 3i, 2 - 2i)$.
4. $\|(3 + 3i, 2 - 2i)\|^2 = |3 + 3i|^2 + |2 - 2i|^2 = 18 + 8 = 26$.
5. **Resultado:** T es normal (es hermitiano); $\|T^*(1 + i, 1 - i)\| = \sqrt{26}$.

Ejercicio 5.5.4 · Adjunto y ¿antisimétrico? en $\mathbb{R}^3$

Adaptado de: 1er final 2014-2, tipo B, problema 6.

Sean el espacio vectorial $\mathbb{R}^3$ con producto interno usual y el operador lineal $S: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ con regla $S(x, y, z) = (2x + 3y, 3x + 2y, 5z)$.

- a) Obtenga el adjunto de S .
- b) Determine si S es antisimétrico.

Resolución.

1. a) $M = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} = M^T$. Por lo tanto $S^*(x, y, z) = (2x + 3y, 3x + 2y, 5z) = S(x, y, z)$.
2. b) Antisimétrico exige $S^* = -S$, es decir, $M^T = -M$, y en particular una diagonal de ceros. Aquí la diagonal es 2, 2, 5.
3. **Resultado:** $S^* = S$; S **no** es antisimétrico (es simétrico).

Ejercicio 5.5.5 · Valores propios y descomposición espectral de una matriz singular

Adaptado de: 1er final 2014-2, tipo B, problema 5.

Sea $N = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ la matriz asociada al operador $H: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ respecto a la base canónica (producto interno usual). Determine: a) el polinomio característico; b) los valores característicos; c) una base de cada espacio característico; d) una matriz diagonalizadora; e) la descomposición espectral de H .

Resolución.

1. a) $\det(N - \lambda I) = (1 - \lambda)(4 - \lambda) - 4 = \lambda^2 - 5\lambda = \lambda(\lambda - 5)$.
2. b) $\lambda_1 = 0$ y $\lambda_2 = 5$. ($\det N = 0$: era de esperarse un valor propio nulo.)
3. c) $\lambda = 0$: $x + 2y = 0$: base $\{(2, -1)\}$. $\lambda = 5$: $-4x + 2y = 0$: base $\{(1, 2)\}$.
4. d) $P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, con $P^{-1}NP = \text{diag}(0, 5)$.
5. e) N es simétrica. Unitarios: $\hat{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}(2, -1)$, $\hat{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}(1, 2)$. $P_1 = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$, $P_2 = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$.
6. **Resultado:** $H = 0P_1 + 5P_2 = 5P_2$, es decir, $H(x, y) = 5(\frac{x+2y}{5})(1, 2) = (x+2y, 2x+4y)$. El término de $\lambda = 0$ no aporta nada, pero se escribe.

Ejercicio 5.5.6 · ¿Es hermitiano?

Adaptado de: 1er extraordinario 2024-1, problema 6.

Determine si el operador lineal $T: \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ con regla $T(x, y) = (x - iy, ix + y)$ es hermitiano respecto al producto interno $((x_1, y_1) | (x_2, y_2)) = x_1 \overline{x_2} + y_1 \overline{y_2}$.

- La ecuación que sobra se cumple: $2(4) + (-1) = 7$. El sistema es compatible.
- $p(x)$ **sí** pertenece al recorrido: $T(4, -1) = 7x^2 + 7x + 5$.

E.3B · Unidad 3 · Parte B · Valores y vectores propios; diagonalización

Ejercicio 3B.6.1

← volver

- a) $M = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & -5 & 0 \\ 6 & 0 & -3 \end{pmatrix}$.
- Por el segundo renglón: $\det(M - \lambda I) = (-5 - \lambda)[(-2 - \lambda)(-3 - \lambda) - 6] = (-5 - \lambda)(\lambda^2 + 5\lambda) = -\lambda(\lambda + 5)^2$.
- b) $\lambda = 0$: $y = 0$ y $-2x + z = 0$: $E(0) = \text{gen}\{(1, 0, 2)\}$.
- $\lambda = -5$: $M + 5I = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, de rango 1: $z = -3x$, con x y y libres. $E(-5) = \text{gen}\{(0, 1, 0), (1, 0, -3)\}$, de dimensión 2, igual a la multiplicidad algebraica.
- c) $D = \text{diag}(0, -5, -5)$, referida a $\{(1, 0, 2), (0, 1, 0), (1, 0, -3)\}$.

Ejercicio 3B.6.2

← volver

- En la base $\{x, 1\}$: $F(x) = x - 2$ y $F(1) = -2x + 1$, así que $M = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$.
- $\det(M - \lambda I) = (1 - \lambda)^2 - 4 = (\lambda - 3)(\lambda + 1)$: valores propios 3 y -1.
- $\lambda = -1$: $2a - 2b = 0$, vector $(1, 1)$, es decir, $x + 1$. $\lambda = 3$: $-2a - 2b = 0$, vector $(1, -1)$, es decir, $x - 1$.
- Comprobación: $F(x + 1) = (1 - 2)x + (1 - 2) = -(x + 1)$ y $F(x - 1) = 3x - 3 = 3(x - 1)$.
- $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ en la base $\{x + 1, x - 1\}$.

Ejercicio 3B.6.3

← volver

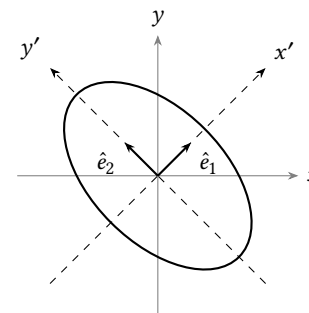
- a) Por el tercer renglón: $\det(M - \lambda I) = (3 - \lambda)[(2 - \lambda)^2 - 1] = (3 - \lambda)(1 - \lambda)(3 - \lambda)$. Valores propios: 1 y 3, este con multiplicidad algebraica 2.
- b) $M - 3I = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ tiene rango 1, así que $\dim E(3) = 3 - 1 = 2$: $E(3) = \text{gen}\{(1, 1, 0), (0, 0, 1)\}$. Para $\lambda = 1$: $E(1) = \text{gen}\{(1, -1, 0)\}$.
- Las dimensiones suman 3: T **sí** es diagonalizable. (Además M es simétrica; en la Unidad 5 se verá que toda matriz real simétrica es diagonalizable.)

Ejercicio 3B.6.4

← volver

- En la base $\{x^2, x, 1\}$: $T(x^2) = 2x^2 - x + 1$, $T(x) = x$, $T(1) = 2x^2 + 3$. Entonces

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$



5.6 Ejercicios propuestos

Ejercicio propuesto 5.6.1

Adaptado de: 1er final 2015-1, tipo A, problema 6.

Sean el espacio vectorial $\mathbb{R}^2$ con producto interno usual y la base $B = \{(1, 0), (0, 1)\}$. La matriz asociada al operador lineal $S: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ respecto a B es $M(S) = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$. Obtenga la descomposición espectral de S .

Resultado: $S = 6P_1 + 1P_2$, con $P_1 = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ (sobre $\text{gen}\{(2, 1)\}$) y $P_2 = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$ (sobre $\text{gen}\{(-1, 2)\}$).

→ Resolución en el Apéndice E, p. 96.

Ejercicio propuesto 5.6.2

Adaptado de: 1er final 2015-1, tipo C, problema 6.

Sean el espacio vectorial $\mathbb{R}^2$ con producto interno usual y el operador $S: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ con regla $S(a, b) = (5a + 2b, 2a + 5b)$. Obtenga la descomposición espectral de S .

Resultado: $S = 7P_1 + 3P_2$, con $P_1(a, b) = \left(\frac{a+b}{2}, \frac{a+b}{2}\right)$ y $P_2(a, b) = \left(\frac{a-b}{2}, \frac{b-a}{2}\right)$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 96.

Ejercicio propuesto 5.6.3

Adaptado de: 2º final 2017-1, problema 6.

Sea la cónica de ecuación $4x^2 + 10xy + 4y^2 = 9$. Determine una ecuación de la cónica sin término mixto.

Resultado: $9x'^2 - y'^2 = 9$, es decir, $x'^2 - \frac{y'^2}{9} = 1$: una hipérbola, con x' en la dirección de $(1, 1)$ y y' en la de $(-1, 1)$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 97.

3. b) $\alpha(x^2 - 1) + \beta(x + 4) = \alpha x^2 + \beta x + (4\beta - \alpha)$: $W = \{ax^2 + bx + c \mid c = 4b - a\}$.
Comprobación: $x^2 + x + 3$ cumple $3 = 4 - 1$.

Ejercicio 2.6.3

← volver

- Como A es la base canónica, las columnas de $M_A^B = (M_B^A)^{-1}$ son los vectores de B .
- La inversa de la triangular se obtiene escalonando $[M_B^A \mid I]$: $M_A^B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
Comprobación: $M_B^A M_A^B = I$.
- $\vec{b}_1 = (1, 0, 0)$, $\vec{b}_2 = (1, 1, 0)$, $\vec{b}_3 = (1, 1, 1)$. Comprobación: $\hat{j} = -\vec{b}_1 + \vec{b}_2$, que es la segunda columna de M_B^A .

Ejercicio 2.6.4

← volver

- Identidad: $\sec^2 x - \tan^2 x = 1$.
- $2(5 \tan^2 x) + 5(-2 \sec^2 x) = 10(\tan^2 x - \sec^2 x) = -10$, y $-10 = 10 \cdot (-1)$. Por lo tanto,
 $2(5 \tan^2 x) + 5(-2 \sec^2 x) - 10(-1) = 0$ para toda $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.
- Hay una combinación con coeficientes no nulos que da la función cero: el conjunto es **linealmente dependiente**.

Ejercicio 2.6.5

← volver

- a) $8x + 3 = \alpha(x + 3) + \beta(2x - 1)$: $\alpha + 2\beta = 8$ y $3\alpha - \beta = 3$, de donde $\alpha = 2$, $\beta = 3$.
- $5x + 1 = \alpha(x + 3) + \beta(2x - 1)$: $\alpha + 2\beta = 5$ y $3\alpha - \beta = 1$, de donde $\alpha = 1$, $\beta = 2$.
- Las columnas: $M_A^B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$.
- b) $(3x + 2)_A = M_A^B(1, -1)^T = (2 - 1, 3 - 2)^T = (1, 1)^T$. Comprobación: $(x + 3) + (2x - 1) = 3x + 2$.

Ejercicio 2.6.6

← volver

- Cero: $(0, 0)$ cumple $0 = |0|$. Se cumple.
- Suma: $(1, 1)$ y $(-1, 1)$ están en A , pero $(1, 1) + (-1, 1) = (0, 2)$ no, porque $2 \neq |0|$. No se cumple.
- Producto: $-1 \cdot (1, 1) = (-1, -1)$ no está en A , porque $-1 \neq |-1|$. No se cumple.
- A **no** es subespacio de $\mathbb{R}^2$: la condición tiene un valor absoluto, que no es lineal.

E.3A · Unidad 3 · Parte A · Transformaciones lineales: núcleo, recorrido, matriz asociada e inversa

Ejercicio 3A.6.1

← volver

- $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} = \frac{a}{3} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \left(b + \frac{a}{3}\right) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$: la entrada $(2, 2)$ da $-\frac{a}{3} + b + \frac{a}{3} = b$.
- a) $T \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} = \frac{a}{3}(2x - 4) + \left(b + \frac{a}{3}\right)(4x - 2) = (2a + 4b)x + (-2a - 2b)$.

8. **No comprobar.** $\sum P_i = I$ y $\sum \lambda_i P_i = M$ se verifican en una línea.

5.8 Formulario de emergencia de la unidad

- $(\vec{u} \mid \vec{v}) = \sum u_i \bar{v}_i$. $(\vec{u} \mid \alpha \vec{v}) = \bar{\alpha}(\vec{u} \mid \vec{v})$
- $(T(\vec{u}) \mid \vec{v}) = (\vec{u} \mid T^*(\vec{v}))$: en base ortonormal $M(T^*) = \overline{M}^T$
- Normal: $MM^* = M^*M$: hermitiano (simétrico): $M^* = M$: antihermitiano (antisimétrico): $M^* = -M$: unitario (ortogonal): $M^*M = I$
- Teorema espectral: normal (simétrico, en real) $\iff$ base ortonormal de vectores propios
- $T = \sum \lambda_i P_i$: $P_i = \sum \hat{e} \hat{e}^T$ (base ortonormal de $E(\lambda_i)$) $\cdot \sum P_i = I$: con base ortonormal de vectores propios de V , $T(\vec{v}) = \sum_j \mu_j(\vec{v} \mid \hat{e}_j)\hat{e}_j$
- Cónica: $ax^2 + bxy + cy^2 = d$, $A = \begin{pmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 = d$

5.9 Procedimiento recomendado en el examen

- El producto interno y la frase «la base canónica es ortonormal respecto a él».
- La matriz M , su transpuesta y su conjugada, en ese orden.
- La regla de T^* y la condición del tipo de operador con su conclusión.
- Para la descomposición espectral: valores propios, vectores unitarios, cada P_i , y la comprobación $\sum P_i = I$.
- Para la cónica: la matriz A con la mitad del término mixto, los valores propios, la nueva ecuación y el nombre de la cónica.

Si no sale la descomposición completa, los valores y vectores propios unitarios bien calculados ya valen buena parte del problema.

Apéndice E · Resoluciones de los ejercicios propuestos

E.1B · Unidad 1 · Parte B · Grupos y campos (solo Plan 2016)

Ejercicio 1B.6.1

← volver

1. Cerradura: todas las entradas están en A . Asociatividad: dada.
2. Idéntico: el renglón y la columna de 1 repiten los encabezados; $e = 1$.
3. Inversos: $1\#1 = 1$, $2\#3 = 1$, $3\#2 = 1$. Todos tienen inverso.
4. Conmutatividad: la tabla es simétrica ($2\#3 = 1 = 3\#2$).
5. $(A, \#)$ es un grupo abeliano.

Ejercicio 1B.6.2

← volver

1. Cerradura: todas las entradas están en K . Asociatividad: dada.
2. Idéntico: el renglón de z es x, y, z, w y su columna también; $e = z$.
3. Inversos: z aparece en el renglón de x bajo y , en el de y bajo x , en el de z bajo z y en el de w bajo w .
4. Conmutatividad: $x\Delta y = z = y\Delta x$, $x\Delta w = y = w\Delta x$, $y\Delta w = x = w\Delta y$; la tabla es simétrica.
5. Es un grupo abeliano.

Ejercicio 1B.6.3

← volver

1. El renglón y la columna de μ son μ, a, b .
2. Renglón de a : ya tiene a (columna μ) y b (columna a); en la columna b solo queda μ . Por simetría, $b\Delta a = \mu$.
3. Tabla:

Δ	μ	a	b
μ	μ	a	b
a	a	b	μ
b	b	μ	a

4. b) μ es su propio inverso; $a\Delta b = \mu$, así que $a' = b$ y $b' = a$.

Ejercicio 1B.6.4

← volver

1. a) El renglón de j en la tabla de $*$ es i, j, k ; el idéntico es j . $i * k = j$, así que $i' = k$ y $k' = i$; $j' = j$.
2. b) En la tabla de $+$, el renglón de k es i, j, k ; el idéntico de $+$ es k . Como $i + j = k$, $-i = j$ y $-j = i$.
3. $-i + k = j + k = j$ y $-j + j = i + j = k$.
4. $(-j + j) * k = k * k = i$, y luego $j * i = i$.
5. El resultado es i .

Ejercicio 1B.6.5

← volver

1. Cerradura: $A + B - 3I$ es una matriz compleja de 2×2 .

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Unidad 4 · Espacios con producto interno

- Axiomas: $(\vec{u} | \vec{v}) = \overline{(\vec{v} | \vec{u})}$. $(\vec{u} + \vec{v} | \vec{w}) = (\vec{u} | \vec{w}) + (\vec{v} | \vec{w})$. $(\alpha \vec{u} | \vec{v}) = \alpha(\vec{u} | \vec{v})$. $(\vec{v} | \vec{v}) > 0$ si $\vec{v} \neq \vec{0}$.
- Usual en $\mathbb{C}^n$: $(\vec{u} | \vec{v}) = \sum u_i \bar{v}_i$. $(\vec{u} | \alpha \vec{v}) = \bar{\alpha}(\vec{u} | \vec{v})$. $(A | B) = \text{tr}(A^T B)$.
- $\|\vec{v}\| = \sqrt{(\vec{v} | \vec{v})}$. $d(\vec{u}, \vec{v}) = \|\vec{u} - \vec{v}\|$. $\cos \theta = \frac{(\vec{u} | \vec{v})}{\|\vec{u}\| \|\vec{v}\|}$. $|\langle \vec{u} | \vec{v} \rangle| \leq \|\vec{u}\| \|\vec{v}\|$.
- Gram-Schmidt: $\vec{e}_k = \vec{v}_k - \sum_{i < k} \frac{(\vec{v}_k | \vec{e}_i)}{(\vec{e}_i | \vec{e}_i)} \vec{e}_i$.
- $W^\perp = \{\vec{v} | (\vec{v} | \vec{w}_i) = 0\}$. $\dim W + \dim W^\perp = \dim V$.
- $\text{proy}_W \vec{v} = \sum \frac{(\vec{v} | \vec{e}_i)}{(\vec{e}_i | \vec{e}_i)} \vec{e}_i$ (base ortogonal) · distancia mínima = $\|\vec{v} - \text{proy}_W \vec{v}\|$.
- Mínimos cuadrados: $A^T A \hat{x} = A^T \vec{b}$.

Unidad 5 · Operadores lineales

- $(\vec{u} | \vec{v}) = \sum u_i \bar{v}_i$. $(\vec{u} | \alpha \vec{v}) = \bar{\alpha}(\vec{u} | \vec{v})$.
- $(T(\vec{u}) | \vec{v}) = (\vec{u} | T^*(\vec{v}))$ · en base ortonormal $M(T^*) = \overline{M}^T$.
- Normal: $MM^* = M^*M$ · hermitiano (simétrico): $M^* = M$ · antihermitiano (antisimétrico): $M^* = -M$ · unitario (ortogonal): $M^*M = I$.
- Teorema espectral: normal (simétrico, en real) $\iff$ base ortonormal de vectores propios.
- $T = \sum \lambda_i P_i$. $P_i = \sum \hat{e} \hat{e}^T$ (base ortonormal de $E(\lambda_i)$) · $\sum P_i = I$ · con base ortonormal de vectores propios de V , $T(\vec{v}) = \sum_j \mu_j (\vec{v} | \hat{e}_j) \hat{e}_j$.
- Cónica: $ax^2 + bxy + cy^2 = d$, $A = \begin{pmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 = d$.

Ángulos notables

θ	0°	30°	45°	60°	90°
$\sin \theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos \theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Matriz de rotación por un ángulo θ en sentido antihorario: $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$.

Apéndice D · Fuentes y bibliografía

Exámenes de los que se adaptaron los ejercicios (Facultad de Ingeniería, UNAM):

- **Plan 2010.** Primeros exámenes finales de *Álgebra Lineal* de 2010-2, 2014-1, 2014-2 (tipos A y B) y 2015-1 (tipos A y C); segundos exámenes finales de 2010-2 y 2014-2.
- **Plan 2016, finales.** Primeros finales de 2017-1, 2018-1, 2020-1 (tipos A y C), 2024-1, 2024-2, 2025-1, 2025-2 y 2026-1; segundos finales de 2017-1, 2020-1, 2024-1 y 2025-1.
- **Plan 2016, extraordinarios.** 2020-1; 2021-1; 2023-1 (primero, segundo y tercero); 2023-2 (primero, segundo y tercero); 2024-1 (primero, segundo y tercero); 2024-2 (primero y segundo); 2025-1; 2025-2; 2026-1 (primero y tercero). El primer extraordinario 2024-1 incluye su resolución.
- **Plan 2016, parciales.** Primeros parciales de 2024-2 y 2026-1; segundos parciales de 2024-2, 2025-1 y 2025-2.

Programas de la asignatura:

- *Álgebra Lineal*, clave 0062, plan de estudios 2010 (aprobado el 19 de noviembre de 2008). Facultad de Ingeniería, UNAM.
- *Álgebra Lineal*, clave 1220, plan de estudios 2016. Facultad de Ingeniería, UNAM.

Bibliografía de los dos programas (cuando un título aparece en los dos, se indican ambas ediciones):

- Anton, H. *Introducción al álgebra lineal*. Limusa: 3.ª ed., 2003 (Plan 2010); Limusa Wiley, 5.ª ed., 2011 (Plan 2016).
- Arzamendi Pérez, S. R., et al. *Cuaderno de ejercicios de álgebra*. Facultad de Ingeniería, UNAM, 2011 (Plan 2016, tema 1).
- Ayres, F. *Álgebra moderna*. McGraw-Hill, 1991 (Plan 2010).
- Bell, E. T. *Historia de las matemáticas*, 2.ª ed. Fondo de Cultura Económica, 1995 (Plan 2010, tema 1).
- Cárdenas, H., et al. *Álgebra superior*, 2.ª ed. Trillas, 1990 (Plan 2010).
- Godínez Cabrera, H.; Herrera Camacho, A. *Álgebra lineal: teoría y ejercicios*. Facultad de Ingeniería, UNAM: 1987 (Plan 2010); 2005 (Plan 2016).
- Grossman, S. I. *Álgebra lineal*. McGraw-Hill: 5.ª ed., 1996 (Plan 2010); con J. J. Flores G., 7.ª ed., 2012 (Plan 2016).
- Larson, R.; Falvo, D. C. *Fundamentos de álgebra lineal*, 6.ª ed. Cengage Learning, 2010 (Plan 2016).
- Lay, D. C. *Álgebra lineal y sus aplicaciones*. Prentice Hall, 3.ª ed., 2007 (Plan 2010); Pearson, 4.ª ed., 2012 (Plan 2016).
- Nakos, G.; Joyner, D. *Álgebra lineal con aplicaciones*. Thomson, 1999 (Plan 2010).
- Poole, D. *Álgebra lineal*, 2.ª ed. Thomson, 2006 (Plan 2010). *Álgebra lineal. Una introducción moderna*, 2.ª ed. Cengage Learning, 2011 (Plan 2016).
- Solar G., E.; Speziale de G., L. *Apuntes de álgebra lineal*, 3.ª ed. Limusa y Facultad de Ingeniería, UNAM, 1996 (Plan 2010).
- Speziale San Vicente, L. *Espacios con producto interno*. Facultad de Ingeniería, UNAM, 2009 (Plan 2016, tema 4).
- Speziale San Vicente, L. *Teorema de proyección*, 2.ª ed. Facultad de Ingeniería, UNAM,

Examen	Problemas (unidad del libro: tema)
1er final 2015-1, tipo C	U2: axiomas de espacio vectorial · U2: matriz de transición (funciones xe^x , e^x) · U3A: núcleo con parámetro; recorrido · U3A: inversa · U4: ¿es producto interno? (espacio complejo) · U5: descomposición espectral

B.2 Plan 2016: los 29 finales y extraordinarios de 2017-1 a 2026-1

El 2º final 2024-1 y el 3er extraordinario 2024-1 fueron el mismo examen; aparece una vez, como 2º final. Los parciales (2024-2 a 2026-1) cubren solo media materia y no se incluyen.

Examen	Problemas (unidad del libro: tema)
1er final 2017-1, tipo B	U1B: grupo abeliano por tabla · U2: ¿subespacio? (polinomios) · U3B: matriz asociada, espacios característicos, ¿diagonalizable? · U4: ¿es producto interno? (matrices) · U4: base ortonormal (Gram-Schmidt) · U5: adjunto
2º final 2017-1	U1B: operación en matrices · U2: bases y coordenadas (transición) · U3A: núcleo y recorrido · U4: proyección sobre un plano · U5: ¿simétrico? · U5: formas cuadráticas: cónica sin término mixto
1er final 2018-1, tipo D	U1B: grupo abeliano · U2: ¿subespacio? (matrices) · U3A: inversa y composición · U3B: valores y espacios propios; matriz diagonal · U4: componentes en W y mínima distancia · U5: tipo de operador en $\mathbb{C}^2$ con producto interno dado
1er extraordinario 2020-1	U2: pertenencia al espacio renglón · U3A: núcleo, recorrido e inversa · U3B: valor y vectores característicos · U4: ¿es producto interno? norma · U4: base ortogonal y proyección · U5: adjunto; ¿normal?
1er final 2020-1, tipo A	U1B: completar tabla de grupo abeliano · U2: matriz de transición entre tres bases · U3A: álgebra de transformaciones ($2T \circ T - T + 3I$) · U3B: espacios característicos · U4: Gram-Schmidt · U5: adjunto
1er final 2020-1, tipo C	U1B: idéntico e inversos por tabla · U2: relacionar columnas (independencia, base, dimensión) · U2: matriz de transición en $\mathbb{C}^2$ · U3B: espacios característicos · U4: complemento ortogonal y vector más cercano · U5: ¿normal?
2º final 2020-1	U1B: ¿grupo? matrices de rotación · U2: base del generado; pertenencia · U3A: núcleo, recorrido, matriz asociada · U3B: valores y espacios característicos; diagonalizar · U4: vector más cercano · U5: ¿simétrico?
2º extraordinario 2021-1	U1B: inversos · U2: ¿bases? · U2: coordenadas y transición · U3B: valores y espacios característicos; ¿diagonalizable? · U4: proyección ortogonal · U5: cónica sin término mixto

Apéndice C · Fe de erratas

Diferencias entre la única resolución publicada de los exámenes y los valores verificados en este cuaderno, y erratas en los enunciados.

C.1B · Unidad 1 · Parte B · Grupos y campos (solo Plan 2016)

2º extraordinario 2021-1, problema 1: en la tabla de + del enunciado, el renglón de k dice $k + i = j$, pero la columna de k dice $i + k = i$: la tabla no es simétrica y k no sería idéntico. Aquí se toma $k + i = i$, con lo que + es conmutativa y k es su idéntico; el inciso b) lo necesita, porque usa los inversos $-i$ y $-j$ respecto a +.

C.2 · Unidad 2 · Espacios vectoriales: subespacios, base, dimensión, coordenadas y matriz de transición

Sin erratas registradas en esta unidad.

C.3A · Unidad 3 · Parte A · Transformaciones lineales: núcleo, recorrido, matriz asociada e inversa

1er final 2014-1, tipo B, problema 3: el enunciado define T y S de $\mathbb{R}^2$ en P_2 , pero la base A del dominio tiene tres vectores de $\mathbb{R}^3$; el dominio es $\mathbb{R}^3$.

1er final 2024-1, problema 3: en el enunciado publicado, las matrices de M , de N y de la regla aparecen escritas en un solo renglón, por ejemplo $(a \ b \ c \ d)$, y la regla dice « $T = (\dots) = (\dots)$ ». Aquí se leen como matrices de 2×2 por renglones; así la imagen es simétrica, como deben ser los elementos de N .

C.3B · Unidad 3 · Parte B · Valores y vectores propios; diagonalización

1er final 2014-2, tipo A, problema 3: el enunciado dice $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, pero la regla tiene tres variables; el operador es de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^3$.

2º extraordinario 2023-2, problema 4: el enunciado nombra $E(1)$ al espacio generado por $(1, -3)$, pero la matriz diagonal dada tiene los valores -1 y 2 . Aquí se toma $E(-1)$, de acuerdo con D .

1er extraordinario 2024-1, problema 4 (resolución publicada): en el paso 4, el sistema del espacio propio de $\lambda = 1$ aparece como $-2a - 2b + 5 = 0$; la ecuación correcta es $-2a + 2b + 5c = 0$. El espacio propio final que se da, $\{(k_1, k_2, \frac{2}{5}(k_1 - k_2))\}$, sí es correcto. En el paso 9 se dice que «la dimensión del espacio propio es tres»: lo que suma tres son las dimensiones de los dos espacios propios.

C.4 · Unidad 4 · Espacios con producto interno: norma, ortogonalidad, Gram-Schmidt y proyección

Sin erratas registradas en esta unidad.

Examen	Problemas (unidad del libro: tema)
1er extraordinario 2024-2	U2: ¿subespacio? (funciones) · U2: transición (polinomios) · U3A: núcleo y recorrido · U3B: espacio característico; diagonalizar · U4: Gram-Schmidt (producto interno ponderado) · U5: descomposición espectral
1er final 2024-2	U1B: grupo abeliano por tabla · U2: transición (polinomios complejos) · U3A: recorrido, base y dimensión; núcleo · U3A: álgebra de transformaciones · U4: base ortogonal, complemento, coordenadas · U5: vectores característicos y descomposición espectral
2º extraordinario 2024-2	U2: ¿subespacio? · U2: independencia lineal (parámetro) · U3A: ¿es lineal? ($2p'' - 3p'$) · U3B: valores y vectores característicos; diagonalizar · U4: complemento ortogonal ($\text{tr}(AB^T)$) · U5: tipo de operador a partir de su matriz
1er extraordinario 2025-1	U1B: (2 reactivos) · U2: (5 reactivos: subespacio, generador, combinación lineal, transición, espacio renglón) · U3A y U3B: (6 reactivos: transformación, matriz asociada de $2T^{-1}$, imagen con vectores propios, inversa, álgebra de transformaciones, diagonalización) · U4: (4 reactivos: complemento, funciones ortogonales, norma en $\mathbb{C}^3$, base de W) · U5: (3 reactivos: tipo de operador, parámetro, clasificar una matriz) (20 reactivos)
1er final 2025-1	U1B: composición de funciones · U2: dimensión con parámetro; base · U3A: regla de correspondencia a partir de imágenes · U4: complemento ortogonal · U5: descomposición espectral
2º final 2025-1	U2: dimensión del generado con parámetro · U2: bases y transición en $\mathbb{C}^2$ · U3A: inversa · U3B: matriz asociada y valores propios · U4: distancia con producto interno complejo · U5: formas cuadráticas: cónica sin términos mixtos
1er extraordinario 2025-2	U1B: cerradura · U2: ¿es base? · U3A: ¿perteneció al recorrido? · U3B: valores y vectores propios · U4: complemento ortogonal (producto interno ponderado) · U5: operador simétrico: descomposición espectral
1er final 2025-2	U1B: grupo abeliano · U2: ¿subespacio? base y dimensión · U3A: base del recorrido; núcleo · U3B: matriz asociada; diagonalización · U4: polinomio más próximo · U5: adjunto y tipo de operador
1er extraordinario 2026-1	U1B: completar tabla de grupo abeliano · U2: base y dimensión · U3A: núcleo y dimensión del recorrido · U3B: espacios característicos; matriz diagonal · U4: complemento ortogonal en P_2 (producto interno por evaluación) · U5: ¿normal?

Resolución.

1. El producto interno es el usual, así que la base canónica es ortonormal y se puede usar la matriz.
2. $T(1, 0) = (1, i)$ y $T(0, 1) = (-i, 1)$: $M = \begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{pmatrix}$.
3. Transpuesta: $\begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix}$; conjugada: $M^* = \begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{pmatrix} = M$.
4. **Resultado:** $T^* = T$: T sí es hermitiano.

Ejercicio 5.5.7 · Parámetro para que el operador sea antihermitiano

Adaptado de: 2º extraordinario 2023-1, problema 5.

Determine, si es posible, el valor de $k \in \mathbb{C}$ para que el operador lineal $T: \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}^3$ con regla $T(a, b, c) = ((-2 + 3i)b - c, ka - ic, a - ib)$ sea antihermitiano respecto al producto interno usual.

Resolución.

1. $M = \begin{pmatrix} 0 & -2 + 3i & -1 \\ k & 0 & -i \\ 1 & -i & 0 \end{pmatrix}$. Antihermitiano: $M^* = -M$, o sea $m_{ij} = -\overline{m_{ji}}$ para todas las entradas.
2. Diagonal: ceros, se cumple.
3. Entradas $(1, 3)$ y $(3, 1)$: $-1 = -\overline{-1}$, se cumple. Entradas $(2, 3)$ y $(3, 2)$: $-i = -\overline{(-i)} = -i$, se cumple.
4. Entradas $(1, 2)$ y $(2, 1)$: $-2 + 3i = -\overline{k}$, así que $\overline{k} = 2 - 3i$ y $k = 2 + 3i$.
5. **Resultado:** $k = 2 + 3i$. Si se pidiera k real, no existiría ningún valor.

Ejercicio 5.5.8 · Cónica sin término mixto

Adaptado de: 2º final 2025-1, problema 6.

Sea la cónica de ecuación $x^2 + xy + y^2 = 3$. Determine una ecuación de la cónica sin términos mixtos.

Resolución.

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$: el coeficiente de xy es 1 y se reparte $\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{2}$.
2. $\det(A - \lambda I) = (1 - \lambda)^2 - \frac{1}{4} = 0$: $\lambda = \frac{3}{2}$ y $\lambda = \frac{1}{2}$.
3. $\lambda = \frac{3}{2}$: $\hat{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1)$. $\lambda = \frac{1}{2}$: $\hat{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 1)$. $P = [\hat{e}_1 \hat{e}_2]$ tiene determinante 1: es un giro de 45° .
4. La ecuación queda $\frac{3}{2}x'^2 + \frac{1}{2}y'^2 = 3$; al dividir entre 3, $\frac{x'^2}{2} + \frac{y'^2}{6} = 1$.
5. **Resultado:** $\frac{3}{2}x'^2 + \frac{1}{2}y'^2 = 3$, una elipse con semiejes $\sqrt{2}$ sobre el eje x' (dirección $(1, 1)$) y $\sqrt{6}$ sobre el eje y' (dirección $(-1, 1)$).

2. Por la segunda columna: $\det(M - \lambda I) = (1 - \lambda)[(2 - \lambda)(3 - \lambda) - 2] = (1 - \lambda)(\lambda^2 - 5\lambda + 4) = -(\lambda - 1)^2(\lambda - 4)$.
3. $\lambda = 1$: $M - I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ da $a = 0$ y $c = 0$, con b libre: $E(1) = \{\alpha x \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$, de dimensión 1.
4. $\lambda = 4$: $M - 4I = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ -1 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ da $c = a$ y $b = -\frac{a}{3}$. Con $a = 3$: $3x^2 - x + 3$.
Comprobación: $T(3x^2 - x + 3) = 12x^2 - 4x + 12$.
5. c) $\lambda = 1$ tiene multiplicidad algebraica 2 y geométrica 1: T **no** es diagonalizable.

Ejercicio 3B.6.5

← volver

1. $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ es triangular: valores propios 1, -2 y 3, distintos.
2. $\lambda = 1$: $2b = 0$, $-3b + c = 0$, $2c = 0$: $(1, 0, 0)$.
3. $\lambda = -2$: $3a + 2b = 0$, $c = 0$: $(2, -3, 0)$.
4. $\lambda = 3$: $-2a + 2b = 0$ y $-5b + c = 0$: $(1, 1, 5)$. Comprobación: $T(1, 1, 5) = (3, 3, 15)$.
5. c) Tres valores distintos: $D = \text{diag}(1, -2, 3)$ en la base $\{(1, 0, 0), (2, -3, 0), (1, 1, 5)\}$.

E.4 · Unidad 4 · Espacios con producto interno: norma, ortogonalidad, Gram-Schmidt y proyección**Ejercicio 4.6.1**

← volver

1. Sea $S(\vec{x}) = x_1 + x_2 + x_3 + x_4$. Entonces $(\vec{x} \mid \vec{y}) = 6S(\vec{x})S(\vec{y})$.
2. Simetría: $6S(\vec{y})S(\vec{x}) = 6S(\vec{x})S(\vec{y})$. Se cumple.
3. Aditividad y homogeneidad: S es lineal, $S(\vec{x} + \vec{z}) = S(\vec{x}) + S(\vec{z})$ y $S(\alpha\vec{x}) = \alpha S(\vec{x})$. Se cumplen.
4. Positividad: $(\vec{x} \mid \vec{x}) = 6S(\vec{x})^2 \geq 0$, pero $\vec{x} = (1, -1, 0, 0) \neq \vec{0}$ da $6 \cdot 0^2 = 0$. No se cumple.
5. No es un producto interno.

Ejercicio 4.6.2

← volver

1. Base de W : $E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Son ortogonales entre sí; $(E_1 \mid E_1) = (E_3 \mid E_3) = 1$ y $(E_2 \mid E_2) = 2$.
2. $(B \mid E_1) = 1$, $(B \mid E_2) = 1 + 0 = 1$, $(B \mid E_3) = -1$.
3. $\text{proy}_W B = 1E_1 + \frac{1}{2}E_2 - 1E_3 = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix}$.
4. Comprobación: $B - \text{proy}_W B = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$, antisimétrica, ortogonal a toda matriz simétrica.

Ejercicio 4.6.3

← volver

Ejercicio propuesto 5.6.4*Adaptado de: 2º extraordinario 2021-1, problema 6.*

Dada la curva $C: 2x^2 - 4xy + 2y^2 = 9$, exprese su ecuación sin el término mixto.

Resultado: $0x'^2 + 4y'^2 = 9$, es decir, $y' = \pm \frac{3}{2}$: dos rectas paralelas al eje x' (dirección $(1, 1)$).

→ Resolución en el Apéndice E, p. 97.

Ejercicio propuesto 5.6.5*Adaptado de: 1er final 2026-1, problema 6.*

Sean el espacio vectorial complejo $\mathbb{C}^2$ con producto interno usual y el operador lineal $T: \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ definido por $T(x, y) = (-2ix + (3-i)y, (-3-i)x - 4iy)$. Determine si T es antihermitiano.

Resultado: sí: $M^* = -M$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 97.

Ejercicio propuesto 5.6.6*Adaptado de: 2º final 2024-1, problema 6.*

Los valores característicos de un operador $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ son $\lambda_{1,2} = 1$ y $\lambda_3 = 7$; los espacios característicos correspondientes son $E(1) = \{(a, b, 0) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ y $E(7) = \{(0, 0, c) \mid c \in \mathbb{R}\}$. Mediante la descomposición espectral de T , obtenga su regla de correspondencia (producto interno usual).

Resultado: $T(x, y, z) = (x, y, 7z)$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 97.

5.7 Errores frecuentes

1. **Transponer sin conjugar** en un espacio complejo. El adjunto es $\overline{M}^T$: las dos operaciones.
2. **Usar M^* con un producto interno que no es el usual.** La regla «adjunto = conjugada transpuesta» solo vale en una base ortonormal respecto a ese producto.
3. **Conjugar el argumento equivocado.** Con la convención de este libro, $(\vec{u} \mid \alpha\vec{v}) = \overline{\alpha}(\vec{u} \mid \vec{v})$.
4. **Confundir los nombres:** simétrico y antisimétrico son de espacios reales; hermitiano y antihermitiano, de complejos. Un real simétrico es también hermitiano.
5. **Decir «no es normal» porque no es simétrico.** Normal se comprueba con $MM^* = M^*M$.
6. **Proyecciones con vectores sin normalizar.** $P = \hat{e}\hat{e}^T$ exige $\|\hat{e}\| = 1$; con $\vec{v}$ sin normalizar, $P = \frac{\vec{v}\vec{v}^T}{(\vec{v} \mid \vec{v})}$. En un espacio real la conjugación no cambia nada; en uno complejo es obligatoria.
7. **Olvidar la mitad del término mixto** al formar la matriz de la cónica: xy con coeficiente b va como $\frac{b}{2}$ en las dos posiciones.

3. Comprobación: con $a = 3, b = -1$: $(6-4)x + (-6+2) = 2x - 4$.

4. b) $2a + 4b = 0$ y $-2a - 2b = 0$ dan $b = 0$ y $a = 0$: $N(T) = \{0\}$ y $\dim T(M) = 2 - 0 = 2$.

Ejercicio 3A.6.2

← volver

1. Las imágenes de la base $\{x+1, 2x-1\}$ de P son la base natural de M , así que T es biyectiva y T^{-1} manda cada matriz de esa base al polinomio correspondiente.
2. $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & -a \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
3. $T^{-1} \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & -a \end{pmatrix} = a(x+1) + b(2x-1) = (a+2b)x + (a-b)$.
4. Comprobación: con $a = 1, b = 0$ da $x+1$; con $a = 0, b = 1$ da $2x-1$.

Ejercicio 3A.6.3

← volver

1. Las imágenes $x^2 + x + 1, x^2 + 1$ y x^2 son linealmente independientes (de la última se obtiene x^2 ; restando, 1 y luego x), así que T es biyectiva.
2. $x^2 = T(1, 1, 1)$; $1 = (x^2 + 1) - x^2 = T(1, 1, 0) - T(1, 1, 1) = T(0, 0, -1)$; $x = (x^2 + x + 1) - (x^2 + 1) = T(1, 0, 0) - T(1, 1, 0) = T(0, -1, 0)$.
3. Entonces $T^{-1}(x^2) = (1, 1, 1)$, $T^{-1}(x) = (0, -1, 0)$, $T^{-1}(1) = (0, 0, -1)$, y

$$T^{-1}(ax^2 + bx + c) = a(1, 1, 1) + b(0, -1, 0) + c(0, 0, -1) = (a, a-b, a-c).$$

4. Comprobación: $T^{-1}(x^2 + 1) = (1, 1, 0)$.

Ejercicio 3A.6.4

← volver

1. **Superposición.** $(A+B)^T = A^T + B^T$, así que $T(A+B) = A+B - A^T - B^T = (A-A^T) + (B-B^T) = T(A) + T(B)$. Se cumple.
2. **Homogeneidad.** $(\alpha A)^T = \alpha A^T$, así que $T(\alpha A) = \alpha A - \alpha A^T = \alpha(T(A))$. Se cumple.
3. T es lineal. (Su núcleo son las matrices simétricas y su recorrido, las antisimétricas: $T \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & b-c \\ c-b & 0 \end{pmatrix}$.)

Ejercicio 3A.6.5

← volver

1. a) $T(x^2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, con coordenadas $(1, 0, 1)$; $T(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, con $(0, 1, 0)$; $T(1) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, con $(-1, 0, 1)$. Son las columnas de $M_B^A(T)$.
2. b) Desarrollando por el segundo renglón, $\det M_B^A(T) = 1 \cdot (1 \cdot 1 - (-1) \cdot 1) = 2 \neq 0$: T es biyectiva. Por sistema: $a-c = p, b = q, a+c = r$, de donde $a = \frac{p+r}{2}, b = q, c = \frac{r-p}{2}$.
3. $T^{-1} \begin{pmatrix} p & q \\ q & r \end{pmatrix} = \frac{p+r}{2}x^2 + qx + \frac{r-p}{2}$. Comprobación: $T^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = x^2$.

Ejercicio 3A.6.6

← volver

1. Se busca (a, b) con $a-3b = 7, 2a+b = 7$ y $a-b = 5$.
2. Restando la primera de la tercera: $2b = -2, b = -1, y a = 5 + b = 4$.

Apéndice A · Formulario

Este apéndice reúne los formularios de todas las unidades, en el orden del libro, y la tabla de ángulos notables que usan las matrices de rotación y las cónicas.

Unidad 1B · Grupos y campos (solo Plan 2016)

- Grupo: cerradura, asociatividad, idéntico $a * e = e * a = a$, inversos $a * a' = a' * a = e$ · abeliano: además $a * b = b * a$
- Tabla: idéntico = renglón y columna que repiten los encabezados · conmutativa = simétrica · grupo: sin repetidos por renglón ni columna
- Campo $(K, \oplus, \odot)$: $(K, \oplus)$ grupo abeliano, $(K \setminus \{0\}, \odot)$ grupo abeliano, $a \odot (b \oplus c) = a \odot b \oplus a \odot c$
- En $\{0, 1, 2\}$ módulo 3: $-1 = 2$, $-2 = 1$, $2^{-1} = 2$
- $x * y = x + y + xy$: $x * y + 1 = (x + 1)(y + 1)$, $e = 0$, $x' = -\frac{x}{1+x}$
- $R(\alpha)R(\beta) = R(\alpha + \beta)$, $R(\theta)^{-1} = R(-\theta)$

Unidad 2 · Espacios vectoriales

- Subespacio: $\vec{0} \in W$, $\vec{u} + \vec{v} \in W$, $\alpha\vec{u} \in W$
- $\dim \mathbb{R}^n = n$ · $\dim P_n = n + 1$ · $\dim M_{m \times n} = mn$ · $\dim \mathbb{C}$ sobre $\mathbb{R} = 2$
- n vectores de $\mathbb{R}^n$ son base $\iff \det \neq 0$
- Vectores como renglones $\rightarrow$ escalonar $\rightarrow$ renglones no nulos = base del generado
- $(\vec{v})_B = M_B^A(\vec{v})_A \cdot (M_B^A)^{-1} = M_A^B \cdot M_C^A = M_C^B M_B^A \cdot M_B^A = \mathbf{B}^{-1} \mathbf{A}$
- rango $N = \dim$ espacio renglón = $\dim$ espacio columna
- Wronskiano (SOLO PLAN 2010): $W(x_0) \neq 0 \Rightarrow$ independientes
- $\sec^2 x - \tan^2 x = 1$ · $\sec^2 x + \cos^2 x = 1$ · $\cos(x + \pi) = -\cos x$

Unidad 3A · Transformaciones lineales

- Lineal: $T(\vec{u} + \vec{v}) = T(\vec{u}) + T(\vec{v})$ y $T(\alpha\vec{u}) = \alpha T(\vec{u})$ · $T(\vec{0}) = \vec{0}$
- $N(T) = \{\vec{v} \mid T(\vec{v}) = \vec{0}\}$ · $T(V) = \text{gen}\{T(\vec{v}_1), \dots, T(\vec{v}_n)\}$
- $\dim V = \dim N(T) + \dim T(V)$ · $\dim T(V) = \text{rango } M(T)$
- Inyectiva $\iff N(T) = \{\vec{0}\}$ · biyectiva $\iff M(T)$ cuadrada con $\det \neq 0$
- $M_B^A(T)$: columna $j = (T(\vec{v}_j))_B \cdot (T(\vec{v}))_B = M_B^A(T)(\vec{v})_A$
- $M(S + T) = M(S) + M(T)$ · $M(R \circ T) = M(R)M(T)$ · $M_A^B(T^{-1}) = [M_B^A(T)]^{-1}$
- Rotación: $\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ · área por $|\det M|$

Unidad 3B · Valores y vectores propios

- $T(\vec{v}) = \lambda\vec{v}$, $\vec{v} \neq \vec{0}$ · $E(\lambda) = N(M - \lambda I)$ · $p(\lambda) = \det(M - \lambda I)$
- $\sum \lambda_i = \text{tr } M$ · $\prod \lambda_i = \det M$ · triangular: los valores propios están en la diagonal
- $\dim E(\lambda) = n - \text{rango}(M - \lambda I)$ · $1 \leq m$ geométrica $\leq m$ algebraica
- Diagonalizable $\iff \sum \dim E(\lambda_i) = n$ · n valores distintos $\Rightarrow$ diagonalizable
- $D = P^{-1}MP$, columnas de P = vectores propios en el orden de D · $M = PDP^{-1}$

2. Asociatividad: $(A \# B) \# C = A + B + C - 6I = A \# (B \# C)$.
3. Idéntico: $A + E - 3I = A$ da $E = 3I$, que está en M .
4. Inverso: $A + A' - 3I = 3I$ da $A' = 6I - A$, que está en M .
5. Conmutatividad: $A + B - 3I = B + A - 3I$.
6. Es un grupo abeliano.

Ejercicio 1B.6.6

← volver

1. Cualquier real u se escribe $\frac{u-1}{1} + 1$, así que $A = \mathbb{R}$. Con $u = \frac{x_1}{y_1} + 1$ y $v = \frac{x_2}{y_2} + 1$, la regla es $u * v = (u - 1) + (v - 1) + 1 = u + v - 1$.
2. Idéntico: $u + e - 1 = u$ da $e = 1$ (es decir, $\frac{0}{y} + 1$).
3. Inverso: $u + u' - 1 = 1$ da $u' = 2 - u \in \mathbb{R}$.
4. Conmutatividad: $u + v - 1 = v + u - 1$.
5. Con la cerradura y la asociatividad dadas, es un grupo abeliano.

E.2 · Unidad 2 · Espacios vectoriales: subespacios, base, dimensión, coordenadas y matriz de transición

Ejercicio 2.6.1

← volver

1. a) Tres vectores de $\mathbb{R}^3$ generan un espacio de dimensión menor que 3 si su determinante es cero:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & -5 \\ 4 & k & -3 \end{pmatrix} = 1(-6 + 5k) - 0 + (-1)(3k - 8) = 2k + 2 = 0,$$

así que $k = -1$. Con ese valor, $(1, 0, -1)$ y $(3, 2, -5)$ son independientes y la dimensión es 2.

2. b) $(-1, 3, -2) = \alpha(1, 0, -1) + \beta(3, 2, -5)$: de la segunda componente, $\beta = \frac{3}{2}$; de la primera, $\alpha = -1 - \frac{9}{2} = -\frac{11}{2}$; la tercera da $\frac{11}{2} - \frac{15}{2} = -2$. Se cumple: $\vec{w}$ sí pertenece.

Ejercicio 2.6.2

← volver

1. Coeficientes (a, b, c) como renglones:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 7 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{R_2 - R_1 \\ R_3 + R_1 \\ R_4 - 2R_1}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & -4 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\substack{R_3 - R_2, R_4 + R_2 \\ R_1 - R_2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

2. a) Base $\{x^2 - 1, x + 4\}$ y $\dim W = 2$.

Apéndice B · Qué vino en cada examen

La unidad indicada es la de este libro: 1B (grupos y campos), 2, 3A (transformaciones), 3B (valores y vectores propios), 4 y 5. Los problemas van en el orden del examen.

B.1 Plan 2010: los 8 finales de 2010-2 a 2015-1

Examen	Problemas (unidad del libro: tema)
1er final 2010-2, tipo C	U2: ¿subespacio? base y dimensión (polinomios) · U2: matriz de transición en un espacio complejo · U3B: matriz asociada a partir de vectores propios · U3A: recorrido, núcleo e inversa · U4: producto interno $k \operatorname{tr}(AB^T)$: distancia · U4: mínimos cuadrados (parábola) · U5: operador simétrico, espacios característicos, descomposición espectral
2° final 2010-2, tipo A	U2: ¿subespacio? (potencias pares) · U2: matriz de transición y coordenadas · U3A: regla de correspondencia desde imágenes; núcleo · U3B: diagonalización ($P^{-1}MP$) · U4: ¿es producto interno? · U4: ¿conjunto ortogonal? (demostración) · U5: operador normal; adjunto
1er final 2014-1, tipo B	U2: ¿subespacio? · U2: espacio renglón, espacio columna y rango · U3A: suma de transformaciones con matrices asociadas · U3B: valores y espacios característicos; diagonalización · U4: base ortogonal (Gram-Schmidt), complemento, proyección · U5: adjunto; ¿normal? (en $\mathbb{C}^2$)
1er final 2014-2, tipo A	U2: matriz de transición ($\mathbb{C}$ sobre $\mathbb{R}$) · U3A: regla, núcleo y recorrido · U3B: espacios característicos; matriz diagonal · U4: complemento ortogonal · U4: demostración con vectores ortogonales (Pitágoras) · U5: adjunto; ¿normal?
1er final 2014-2, tipo B	U2: matriz de transición y coordenadas (en $\mathbb{C}^2$) · U3A: regla de correspondencia · U4: ¿es producto interno? · U4: vector de W más cercano (proyección) · U3B: polinomio característico, diagonalización y descomposición espectral · U5: adjunto; ¿antisimétrico?
2° final 2014-2, tipo A	U2: espacio generado, base, dimensión, pertenencia · U2: bases y coordenadas (transición) · U3A: ¿biyectiva? inversa · U3B: diagonalizable a partir de valores propios; regla · U4: proyección sobre un plano · U5: descomposición espectral
1er final 2015-1, tipo A	U2: axiomas de espacio vectorial (operaciones no usuales) · U2: rango y espacio columna · U3A: matriz asociada e inversa · U4: producto interno complejo; desigualdad del triángulo · U4: proyección ortogonal en matrices · U5: descomposición espectral

- 2002 (Plan 2010, tema 4).
- Speziale San Vicente, L. *Transformaciones lineales*. Facultad de Ingeniería, UNAM: 2007 (Plan 2010); 2002 (Plan 2016) (tema 3).
 - Strang, G. *Álgebra lineal y sus aplicaciones*, 4.ª ed. Thomson, 2006 (Plan 2016).
 - Williams, G. *Linear Algebra with Applications*. Jones and Bartlett: 5th ed., 2005 (Plan 2010); 8th ed., 2014 (Plan 2016).

Examen	Problemas (unidad del libro: tema)
1er extraordinario 2023-1	U2: demostrar que un conjunto es base · U3A: dimensión del núcleo · U3B: ¿diagonalizable? · U4: vector más próximo (polinomios) · U4: complemento ortogonal (matrices) · U5: adjunto
2º extraordinario 2023-1	U2: verdadero/falso (dimensión, transición, combinación lineal) · U3A: composición: ¿biyectiva? · U3B: valores y vectores propios · U4: ángulo y complemento ortogonal · U5: ¿antihermitiano? (parámetro)
3er extraordinario 2023-1	U1B: grupo abeliano · U2: bases y transición en un subespacio de matrices · U3A: transformación $P_2 \rightarrow M_2$ · U3B: valores y espacios característicos · U4: complemento ortogonal ($\text{tr}(A^T B)$) · U5: adjunto
1er extraordinario 2023-2	U2: transición entre tres bases · U2: espacio columna y rango (parámetro) · U3A: regla a partir de la matriz asociada · U3B: ¿diagonalizable? · U4: vector a distancia mínima · U5: adjunto; ¿normal?
2º extraordinario 2023-2	U2: dimensión del generado (parámetro) · U2: transición · U3A: transformación $\mathbb{R}^3 \rightarrow P_2$ · U3B: operador a partir de sus espacios característicos · U4: ángulo con base ortonormal · U4: vectores ortogonales con dos productos internos
3er extraordinario 2023-2	U2: ¿subespacio? · U2: dependencia lineal de funciones · U3A: transformación $M \rightarrow P$ · U3B: ¿diagonalizable? · U4: complemento ortogonal · U5: adjunto y tipo de operador en $\mathbb{C}^2$
1er extraordinario 2024-1	U1B: ecuaciones en un campo finito · U2: dependencia lineal, dimensión, base · U3A: matriz asociada e inversa · U3B: diagonalizable (parámetro k) · U4: polinomio ortogonal y ángulo · U5: ¿hermitiano?
1er final 2024-1	U1B: ¿grupo? $x * y = x + y + xy$ · U2: bases y transición (polinomios) · U3A: transformación entre espacios de matrices · U3A: álgebra de transformaciones · U4: complemento ortogonal y base · U5: ¿simétrico? espacios característicos, descomposición espectral
2º extraordinario 2024-1	U2: vectores de las bases a partir de la transición · U2: dimensión con parámetro; base · U3A: núcleo, matriz asociada, inversa · U3B: valores propios a partir de imágenes; regla · U4: complemento ortogonal (producto interno ponderado) · U5: ¿antihermitiano?
2º final 2024-1	U2: ¿subespacio? ($y = x $) · U2: dependencia lineal de funciones · U3A: inversa y núcleo · U3B: espacios característicos; matriz diagonal · U4: vector de W más cercano · U5: descomposición espectral y regla de correspondencia

C.5 · Unidad 5 · Operadores lineales en espacios con producto interno: adjunto, tipos de operador y teorema espectral

2º extraordinario 2023-1, problema 5: el enunciado dice que el operador va de un espacio de dimensión 2 en sí mismo, pero la regla tiene tres variables y tres componentes; el operador es de $\mathbb{C}^3$ en $\mathbb{C}^3$.

Examen	Problemas (unidad del libro: tema)
1er final 2026-1	U1B: grupo abeliano por tabla · U2: vectores de una base a partir de la transición · U3A: núcleo, dimensión · U3B: matriz diagonal · U4: complemento ortogonal · U5: tipo de operador en $\mathbb{C}^2$
3er extraordinario 2026-1	U2: espacio generado y dimensión (matrices) · U2: coordenadas con transición · U3A: $T(A) = A - A^T$ · U3B: valores y espacios propios · U4: Gram-Schmidt en P_2 con producto interno integral · U5: ¿normal? (en $\mathbb{C}^2$)

B.3 Dos exámenes completos para practicar

Resuelve cada examen en 2 horas, sin consultar, y después compara. Al final de cada problema se indica dónde está resuelto en este libro o, si no lo está, el resultado y el procedimiento que lo resuelve.

Plan 2010: 1er final 2014-1, tipo B (6 problemas, 2 horas)

- Sean el espacio vectorial real $P_2 = \{ax^2 + bx + c \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}$ y $D = \{p(x) \mid p(0) = 3\}$ un subconjunto de P_2 . Determine si D es un subespacio de P_2 . *Resultado:* no lo es; el polinomio cero no está en D , porque $0 \neq 3$ (procedimiento 2.3.2).
- El espacio renglón de $N = \begin{pmatrix} 3 & a & 2 \\ 3 & b & 5 \\ 5 & c & 3 \end{pmatrix}$ es $\{(m, n, m+n) \mid m, n \in \mathbb{R}\}$. a) Determine a, b y c. b) Con esos valores, determine el espacio columna de N . c) Obtenga el rango de N . *Resuelto en el ejercicio 2.5.3.*
- Sean P_2 y las transformaciones lineales $T, S: \mathbb{R}^3 \rightarrow P_2$ cuyas matrices asociadas respecto a las bases $A = \{(1, 1, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ y $B = \{1, x, x^2\}$ son $M_B^A(T) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ y $M_B^A(S) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Obtenga la regla de correspondencia de $S + T$. *Resuelto en el ejercicio 3A.5.3.*
- Sea $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ con $F(x, y) = (4x - 5y, 2x - 3y)$. Determine una matriz asociada, los valores y espacios característicos, una matriz diagonal y una diagonalizadora. *Resuelto en el ejemplo de la sección 3B.4.*
- En $\mathbb{R}^3$ con $(\vec{u} \mid \vec{v}) = u_1v_1 + 2u_2v_2 + u_3v_3$, sea W con base $\{(1, 0, 1), (0, 1, -1)\}$. Determine una base ortogonal de W , el complemento ortogonal de W y la proyección de $\vec{u} = (1, 1, 1)$ sobre W . *Resuelto en el ejercicio 4.5.6.*
- En $\mathbb{C}^2$ con el producto interno usual, sea $S(x, y) = (xi, 2iy)$. Obtenga el adjunto de S y determine si S es normal. *Resuelto en el ejercicio 5.5.2.*

Plan 2016: 1er final 2025-2 (6 problemas, 2 horas)

- Para el conjunto $B = \{e^x \mid x \in \mathbb{Z}\}$ y la operación $e^{x_1} * e^{x_2} = e^{x_1+x_2}$, determine si $(B, *)$ es un grupo abeliano. *Resultado:* sí; el idéntico es $e^0 = 1$ y el inverso de e^x es e^{-x} (procedimiento 1B.3.3).

- Determine si $W = \{(x, y, z) \mid 4x - y = 0, 5x - z = 0\}$ es un subespacio de $\mathbb{R}^3$. En caso afirmativo, obtenga una base y su dimensión. *Resultado:* sí; $W = \{\alpha(1, 4, 5)\}$, con base $\{(1, 4, 5)\}$ y dimensión 1 (procedimiento 2.3.2).
- Sea $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ con $T(x, y, z) = (2x + 4y + z, -z, 2z)$. a) Determine una base del recorrido. b) Obtenga la dimensión del núcleo. *Resultado:* a) $\{(1, 0, 0), (1, -1, 2)\}$; b) $\dim N(T) = 1$, con $N(T) = \text{gen}\{(-2, 1, 0)\}$ (procedimiento 3A.3.3).
- Sean $P = \{ax + b \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ y $T: P \rightarrow P$ con $T(ax + b) = (2a + b)x + (6a + b)$. Determine una matriz asociada, los espacios característicos, y una matriz diagonal y la base a la que está referida. *Resultado:* en la base $\{x, 1\}$, $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$; $E(4) = \{\alpha(x + 2)\}$ y $E(-1) = \{\beta(x - 3)\}$; $D = \text{diag}(4, -1)$ en la base $\{x + 2, x - 3\}$ (procedimientos 3B.3.4 y 3B.3.6).
- Sean P_2 , $W = \{ax^2 \mid a \in \mathbb{R}\}$ y el producto interno $(p \mid q) = \sum_{i=-1}^1 p(i)q(i)$. Determine el polinomio $h \in W$ más próximo a $m(x) = x^2 + 1$. *Resuelto en el ejercicio 4.5.8.*
- En $\mathbb{R}^2$ con el producto interno usual, sea S con matriz $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ en la base canónica. a) Obtenga el adjunto de S . b) Determine si S es normal. *Resultado:* a) $S^*(x, y) = (x + 3y, 2x + 4y)$; b) no: $MM^T = \begin{pmatrix} 5 & 11 \\ 11 & 25 \end{pmatrix} \neq M^T M = \begin{pmatrix} 10 & 14 \\ 14 & 20 \end{pmatrix}$ (procedimientos 5.3.1 y 5.3.2).