Si el enunciado dice…	Se pide…	Procedimiento
«una matriz diagonal asociada y la base a la que está referida», «matriz diagonalizadora», «P tal que $P^{-1}MP$ sea diagonal»	D y P	3B.3.4
se dan los valores y vectores propios (o D y los espacios característicos) y se pide la regla o la matriz	$M = PDP^{-1}$	3B.3.5
el operador actúa sobre polinomios o matrices	lo mismo, en coordenadas	3B.3.6

3B.3 Procedimientos

3B.3.1 Valores propios

1. Escribe la matriz M asociada a T. Con la regla $T(x, y, z) = (\dots)$, la columna j de M es la imagen del j-ésimo vector canónico: los coeficientes de x forman la primera columna, los de y la segunda, y así sucesivamente.
2. Forma $M - \lambda I$ (resta λ solo en la diagonal) y calcula su determinante. Si hay un renglón o una columna con ceros, desarrolla por ahí: el polinomio sale ya factorizado.
3. Iguala a cero y resuelve. Para un polinomio de grado 3 sin factor visible, prueba las raíces enteras que dividen al término independiente y usa división sintética.
4. Comprueba: la suma de los valores propios es la traza de M y su producto es $\det M$.

3B.3.2 Espacios característicos

1. Para cada valor propio λ_i, sustituye en $M - \lambda_i I$. Su determinante es cero, así que el sistema $(M - \lambda_i I)\vec{v} = \vec{0}$ tiene infinitas soluciones.
2. Escalona y deja libres tantas variables como renglones nulos queden. El número de parámetros es la multiplicidad geométrica.
3. Escribe $E(\lambda_i) = \{\, \alpha(\dots) \mid \alpha \in \mathbb{R} \,\}$ y da una base. Comprueba con la regla: $T(\vec{v})$ debe dar $\lambda_i \vec{v}$.

3B.3.3 ¿Es diagonalizable?

1. Calcula los valores propios con su multiplicidad algebraica.
2. Si todos son distintos (y reales, en un espacio real), es diagonalizable; termina.
3. Para cada valor repetido λ, calcula $\dim E(\lambda) = n - \text{rango}(M - \lambda I)$ y compárala con la multiplicidad algebraica. Si alguna es menor, no es diagonalizable.
4. **Con parámetro k:** el parámetro casi nunca cambia los valores propios (suele estar fuera de la diagonal en una matriz triangular por bloques). Lo que cambia es el rango de $M - \lambda I$ para el valor repetido. Escoge k para que ese rango baje lo suficiente.

3B.3.4 Matriz diagonal y base a la que está referida

1. Toma un vector de cada base de los espacios característicos (todos los vectores de la base, si la dimensión es mayor que 1).

general como combinación de vectores fijos.

2.3.3 Combinación lineal y pertenencia

1. Plantea $\vec{v} = \alpha_1\vec{v}_1 + \cdots + \alpha_k\vec{v}_k$ e iguala componente por componente (o coeficiente por coeficiente).
2. Escribe la matriz aumentada con los $\vec{v}_i$ como columnas y $\vec{v}$ como última columna, y escalona.
3. Si aparece un renglón $\left[\, 0 \;\cdots\; 0 \mid c \,\right]$ con $c \neq 0$, el sistema es inconsistente: $\vec{v}$ no pertenece al generado. Si no, pertenece, y la solución da los coeficientes.
4. Atajo: si ya tienes la ecuación del generado (por ejemplo, $z = y - x$), basta sustituir $\vec{v}$ en ella.

2.3.4 Dependencia lineal, base y dimensión

1. Pon los vectores (o los coeficientes de los polinomios, o las entradas de las matrices) como **renglones** de una matriz.
2. Escalona. El número de renglones no nulos es la dimensión del generado, y esos renglones forman una base.
3. Si el número de renglones no nulos es menor que el número de vectores, el conjunto es dependiente.
4. **Con parámetro:** escalona dejando el parámetro en la última columna posible y escoge su valor para que el renglón que lo contiene se anule (dimensión menor) o no (dimensión mayor). Con n vectores de $\mathbb{R}^n$, iguala el determinante a cero.
5. Para dar el generado como conjunto, agrega un renglón genérico (x, y, z) y exige que no aumente el rango: sale la ecuación del subespacio.

2.3.5 Coordenadas y matriz de transición

1. Para M_B^A, escribe cada vector de A como combinación lineal de los vectores de B. Los coeficientes de cada uno forman una **columna**.
2. Atajo en $\mathbb{R}^n$ (o con coordenadas en una base sencilla): si $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ son las matrices con los vectores de cada base como columnas, $M_B^A = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}$. Se calcula escalonando $\left[\, \mathbf{B} \mid \mathbf{A} \,\right]$ hasta $\left[\, I \mid M_B^A \,\right]$.
3. Coordenadas: $(\vec{v})_B = M_B^A (\vec{v})_A$. Para pasar de B a A, usa la inversa.
4. **Base desconocida.** Si se da M_F^E y se conoce E, los vectores de F salen de $M_E^F = (M_F^E)^{-1}$: la columna j da las coordenadas de $\vec{w}_j$ en E.
5. Comprueba con un vector: reconstrúyelo con sus coordenadas en las dos bases.

2.3.6 Espacio renglón, espacio columna y rango

1. Espacio renglón: escalona N; los renglones no nulos son una base.
2. Espacio columna: escalona N^T (las columnas como renglones), o toma las columnas de N que corresponden a los pivotes de su forma escalonada.
3. Rango = número de pivotes. Si se da el rango y hay un parámetro, iguala a cero los menores que lo harían mayor.
4. Si se da el espacio renglón como conjunto, cada renglón de N debe cumplir su condición: de ahí salen los valores desconocidos.

Unidad 3 · Parte B · Valores y vectores propios; diagonalización

Objetivo (programa de la asignatura). El alumno aplicará el concepto de transformación lineal y sus propiedades en la resolución de problemas que los involucren. (El Plan 2016 dice lo mismo.)

Instrucciones de emergencia

- **Frecuencia:** es el subtema que más sale. Hay un problema de valores y vectores propios en 6 de los 8 finales del Plan 2010 y en 25 de los 29 finales y extraordinarios del Plan 2016. Además, la Unidad 5 lo usa en la descomposición espectral y en las formas cuádricas.
- **Tiempo:** de 3 a 4 horas para esta parte.
- **Ruta corta:**
  1. Lee la sección 3B.1 (20 min).
  2. Sigue el ejemplo 3B.4 tapando la resolución.
  3. Resuelve los ejercicios 3B.5 con cronómetro (15 min cada uno).

3B.1 Conceptos y expresiones

Operador lineal. Una transformación lineal $T: V \to V$, con el mismo espacio de salida y de llegada, se llama *operador lineal*. Solo los operadores tienen valores propios.

Valor y vector propio. Un escalar λ es un *valor propio* (o *valor característico*) de T si existe un vector $\vec{v} \neq \vec{0}$ tal que

$$T(\vec{v}) = \lambda\,\vec{v}.$$

Ese $\vec{v}$ es un *vector propio* (o *vector característico*) asociado a λ. Geométricamente, T no cambia la dirección de $\vec{v}$: solo lo estira, lo encoge o lo invierte. El vector cero nunca es vector propio, pero el escalar 0 sí puede ser valor propio; ocurre cuando T no es inyectiva.

Espacio característico. Para cada valor propio, el conjunto

$$E(\lambda) = \{\vec{v} \in V \mid T(\vec{v}) = \lambda\vec{v}\} = N(T - \lambda I)$$

es un subespacio de V: contiene al vector cero y a todos los vectores propios de λ. Su dimensión es la *multiplicidad geométrica* de λ.

Polinomio característico. Si M es una matriz asociada a T (en cualquier base), los valores propios son las raíces del polinomio característico

$$p(\lambda) = \det(M - \lambda I).$$

Las raíces se cuentan con su *multiplicidad algebraica*: en $p(\lambda) = -(\lambda-1)^2(\lambda-3)$, el valor $\lambda = 1$ tiene multiplicidad algebraica 2. Siempre se cumple

$$1 \le \text{multiplicidad geométrica} \le \text{multiplicidad algebraica}.$$

El polinomio no depende de la base: matrices asociadas al mismo operador en bases distintas tienen el mismo polinomio característico.

3. a) Un vector de W es $\alpha(1,0,-1) + \beta(0,1,1) = (\alpha, \beta, \beta - \alpha)$: su tercera componente es la segunda menos la primera.

   $$W = \{(x,y,z) \mid z = y - x\}.$$

   Comprobación con un vector de A: $(2,-2,-4)$ cumple $-4 = -2 - 2$.
4. c) Para $\vec{v} = (3,2,1)$: $y - x = 2 - 3 = -1 \neq 1 = z$.
5. **Resultado:** W es el plano $x - y + z = 0$, de dimensión 2, con base $\{(1,0,-1),(0,1,1)\}$; $\vec{v} = (3,2,1)$ **no** pertenece a W.

2.5 Ejercicios de examen (resueltos)

Ejercicio 2.5.1 · Subespacio definido con una integral

Adaptado de: 1er final 2010-2, tipo C, problema 1.

Sean P el espacio vectorial real de los polinomios de grado menor o igual a dos con coeficientes reales y

$$T = \left\{ p(x) \in P \;\middle|\; \int_{-1}^{1} p(x)\,dx = 4p(0) \right\}.$$

Determine si T es un subespacio de P. En caso afirmativo, obtenga una base y la dimensión de T; en caso negativo, explique por qué no lo es.

Resolución.

1. Con $p(x) = ax^2 + bx + c$: $\int_{-1}^{1}(ax^2 + bx + c)\,dx = \frac{2a}{3} + 0 + 2c$ (la parte impar se anula) y $4p(0) = 4c$.
2. La condición es $\frac{2a}{3} + 2c = 4c$, es decir, $a = 3c$: una ecuación lineal y homogénea en los coeficientes.
3. Cero: $p = 0$ cumple $0 = 0$. Suma: si $a_1 = 3c_1$ y $a_2 = 3c_2$, entonces $a_1 + a_2 = 3(c_1 + c_2)$; se cumple. Producto: $\alpha a_1 = 3(\alpha c_1)$; se cumple. T es subespacio.
4. Elemento general: $3cx^2 + bx + c = b\,x + c\,(3x^2 + 1)$.
5. **Resultado:** T es subespacio de P, con base $\{x,\ 3x^2 + 1\}$ y dimensión 2. Comprobación: $\int_{-1}^{1}(3x^2 + 1)\,dx = 2 + 2 = 4 = 4p(0)$.

Ejercicio 2.5.2 · Axiomas con una multiplicación por escalar no usual

Adaptado de: 1er final 2015-1, tipo C, problema 1.

Sea $V = \{(a,b) \mid a,b \in \mathbb{Q}\}$ con las operaciones

$$(a,b) + (c,d) = (a + c,\ b + d), \qquad k(a,b) = (a^k,\ b^k), \qquad k \in \mathbb{Q}.$$

Considerando que se cumplen la cerradura de la adición, la asociatividad, la conmutatividad, $\alpha(\beta\vec{u}) = (\alpha\beta)\vec{u}$ y $1\vec{u} = \vec{u}$, determine si V es un espacio vectorial sobre $\mathbb{Q}$. En caso afirmativo, obtenga $\vec{m} = \frac{1}{2}(3,5)$; en caso negativo, indique todos los axiomas que no se satisfacen.

Resolución.

Resultado: a) $M_B^A(T) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; b) $T^{-1}\begin{pmatrix} p & q \\ q & r \end{pmatrix} = \frac{p+r}{2}x^2 + qx + \frac{r-p}{2}$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 93.

Ejercicio propuesto 3A.6.6

Adaptado de: 1er extraordinario 2025-2, problema 3.

Sean el espacio vectorial $P_2 = \{ax^2 + bx + c \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}$ y la transformación lineal $T : \mathbb{R}^2 \to P_2$ con regla $T(a, b) = (a - 3b)x^2 + (2a + b)x + (a - b)$. Determine si el polinomio $p(x) = 7x^2 + 7x + 5$ pertenece al recorrido de T.

Resultado: sí: $p = T(4, -1)$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 93.

3A.7 Errores frecuentes

1. **Probar la linealidad con números.** Un ejemplo que funciona no demuestra nada; uno que falla sí basta para decir que no es lineal. La demostración se hace con vectores genéricos.
2. **Escribir la matriz asociada por renglones.** La columna j es la imagen del j-ésimo vector de la base del dominio, en coordenadas de la base del codominio.
3. **Olvidar pasar a coordenadas.** Si la base del codominio no es la canónica, cada imagen se escribe como combinación lineal de esa base antes de ponerla como columna.
4. **Invertir el orden de la composición.** $M(S \circ T) = M(S)M(T)$: primero actúa T. En una ecuación $U \circ T = V$, se despeja $T = U^{-1} \circ V$, no $V \circ U^{-1}$.
5. **Confundir núcleo y recorrido.** El núcleo vive en el dominio y se obtiene igualando a cero; el recorrido vive en el codominio y lo generan las imágenes.
6. **Dar el recorrido como $\mathbb{R}^3$ sin revisar el rango.** El número de imágenes no es la dimensión; hay que quitar las dependientes.
7. **Buscar la inversa sin revisar el núcleo.** Si $\dim V \neq \dim W$ o $N(T) \neq \{\vec{0}\}$, no hay inversa.
8. **No comprobar.** La regla obtenida debe reproducir los datos del enunciado, y $T^{-1}(T(\vec{v})) = \vec{v}$.

3A.8 Formulario de emergencia de la unidad

- Lineal: $T(\vec{u} + \vec{v}) = T(\vec{u}) + T(\vec{v})$ y $T(\alpha\vec{u}) = \alpha T(\vec{u}) \cdot T(\vec{0}) = \vec{0}$
- $N(T) = \{\vec{v} \mid T(\vec{v}) = \vec{0}\} \cdot T(V) = \text{gen}\{T(\vec{v}_1), \ldots, T(\vec{v}_n)\}$
- $\dim V = \dim N(T) + \dim T(V) \cdot \dim T(V) = \text{rango}\, M(T)$
- Inyectiva $\iff N(T) = \{\vec{0}\} \cdot$ biyectiva $\iff M(T)$ cuadrada con $\det \neq 0$
- $M_B^A(T)$: columna $j = (T(\vec{v}_j))_B \cdot (T(\vec{v}))_B = M_B^A(T)(\vec{v})_A$
- $M(S + T) = M(S) + M(T) \cdot M(R \circ T) = M(R)M(T) \cdot M_A^B(T^{-1}) = [M_B^A(T)]^{-1}$
- Rotación: $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \cdot$ área por $|\det M|$

- a) la matriz de transición de la base A a la base B;
- b) el vector de coordenadas de $\vec{u} = (1, -2i)$ respecto a la base A.

Resolución.

1. a) Cada vector de A en la base B, con escalares complejos.
2. $(1, i) = \alpha(2, i) + \beta(0, -i)$: de la primera componente, $\alpha = \frac{1}{2}$; de la segunda, $\frac{i}{2} - i\beta = i$, así que $\beta = -\frac{1}{2}$.
3. $(i, 0) = \alpha(2, i) + \beta(0, -i)$: $\alpha = \frac{i}{2}$; $\frac{i}{2} \cdot i - i\beta = 0$, es decir, $-\frac{1}{2} = i\beta$ y $\beta = \frac{i}{2}$.
4. Las coordenadas son las columnas:

$$M_B^A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{i}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{i}{2} \end{pmatrix}.$$

5. b) $(1, -2i) = \alpha(1, i) + \beta(i, 0)$: de la segunda componente, $\alpha i = -2i$ y $\alpha = -2$; de la primera, $-2 + i\beta = 1$, así que $\beta = \frac{3}{i} = -3i$.
6. Comprobación: $-2(1, i) - 3i(i, 0) = (-2 + 3,\ -2i) = (1, -2i)$.
7. **Resultado:** $M_B^A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & i \\ -1 & i \end{pmatrix}$ y $(\vec{u})_A = (-2,\ -3i)^T$.

Ejercicio 2.5.5 · Vectores de una base a partir de la matriz de transición

Adaptado de: 2º final 2014-2, tipo A, problema 2.

Sea V el espacio vectorial real que tiene las bases $E = \{x^2,\ x^2 + x,\ x^2 + x + 1\}$ y $F = \{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3\}$. La matriz de transición de la base E a la base F es

$$M_F^E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

y el vector de coordenadas de $\vec{v} \in V$ en la base F es $(\vec{v})_F = (4, -5, 7)^T$. Determine: a) los vectores de la base F; b) el vector de coordenadas de $\vec{v}$ en la base E.

Resolución.

1. Las columnas de $M_E^F = (M_F^E)^{-1}$ son las coordenadas de los $\vec{w}_j$ en E. Por escalonamiento (o porque es triangular con unos):

$$M_E^F = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. a) $\vec{w}_1 = x^2$; $\vec{w}_2 = -x^2 + (x^2 + x) = x$; $\vec{w}_3 = -(x^2 + x) + (x^2 + x + 1) = 1$. Es decir, $F = \{x^2, x, 1\}$.
3. b) $(\vec{v})_E = M_E^F(\vec{v})_F = (4 + 5,\ -5 - 7,\ 7)^T = (9, -12, 7)^T$.
4. Comprobación: con F, $\vec{v} = 4x^2 - 5x + 7$; con E, $9x^2 - 12(x^2 + x) + 7(x^2 + x + 1) = 4x^2 - 5x + 7$.
5. **Resultado:** $F = \{x^2,\ x,\ 1\}$ y $(\vec{v})_E = (9, -12, 7)^T$, con $\vec{v} = 4x^2 - 5x + 7$.

1. a) $T(A)=0$ da el sistema $a-b=0$, $d-c=0$, $2a+b+c=0$. Entonces $b=a$, $c=-3a$ y $d=c=-3a$:
$$N(T)=\left\{\alpha\begin{pmatrix}1&1\\-3&-3\end{pmatrix}\,\middle|\,\alpha\in\mathbb{R}\right\},\qquad \dim N(T)=1.$$
2. b) Teorema de la dimensión: $\dim T(M)=\dim M-\dim N(T)=4-1=3$. Como $\dim N=3$, T es suprayectiva: $T(M)=N$.
3. c) $N(T)\neq\{0\}$ (y además $\dim M=4\neq 3=\dim N$): T no es inyectiva y **no existe** T^{-1}.
4. **Resultado:** $N(T)$ está generado por $\begin{pmatrix}1&1\\-3&-3\end{pmatrix}$; $\dim T(M)=3$; no hay inversa.

Ejercicio 3A.5.8 · Transformación que cumple una ecuación con composiciones

Adaptado de: 1er final 2024-2, problema 4.

Sean las transformaciones lineales $U,V,W:\ \mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ con reglas

$$U(x,y)=(2x-y,\ -x+y),\qquad V(x,y)=(2x-y,\ x+y),\qquad W(x,y)=(x-2y,\ -3x+y).$$

Determine la regla de correspondencia de la transformación lineal T tal que $U\circ T-V=W$.

Resolución.

1. Se despeja sin cambiar el orden: $U\circ T=V+W$ y $T=U^{-1}\circ(V+W)$, si U es invertible.
2. En la base canónica: $M(U)=\begin{pmatrix}2&-1\\-1&1\end{pmatrix}$, con $\det M(U)=1$, y $M(U)^{-1}=\begin{pmatrix}1&1\\1&2\end{pmatrix}$.
3. $M(V)+M(W)=\begin{pmatrix}2&-1\\1&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&-2\\-3&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&-3\\-2&2\end{pmatrix}$.
4. $M(T)=\begin{pmatrix}1&1\\1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&-3\\-2&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-1\\-1&1\end{pmatrix}$.
5. Comprobación: $U\big(T(x,y)\big)=U(x-y,\ -x+y)=(3x-3y,\ -2x+2y)=(V+W)(x,y)$.
6. **Resultado:** $T(x,y)=(x-y,\ -x+y)$.

3A.6 Ejercicios propuestos

Ejercicio propuesto 3A.6.1

Adaptado de: 1er final 2014-2, tipo A, problema 2.

Sean los espacios vectoriales reales $M=\left\{\begin{pmatrix}a&0\\0&b\end{pmatrix}\,\middle|\,a,b\in\mathbb{R}\right\}$ y $P=\{ax+b\mid a,b\in\mathbb{R}\}$, y la transformación lineal $T:\ M\to P$ tal que

$$T\begin{pmatrix}3&0\\0&-1\end{pmatrix}=2x-4,\qquad T\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}=4x-2.$$

a) Determine la regla de correspondencia de T. b) Obtenga el núcleo de T y la dimensión del recorrido de T.

Resultado: a) $T\begin{pmatrix}a&0\\0&b\end{pmatrix}=(2a+4b)x-(2a+2b)$; b) $N(T)=\{0\}$ y $\dim T(M)=2$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 92.

2.6 Ejercicios propuestos

Ejercicio propuesto 2.6.1

Adaptado de: 2º final 2025-1, problema 1.

Sea $G=\{(1,0,-1),\ (3,2,-5),\ (4,k,-3)\}\subset\mathbb{R}^3$. Determine: a) el valor de $k\in\mathbb{R}$ tal que la dimensión del espacio generado por G sea dos; b) si $\vec{w}=(-1,3,-2)$ pertenece al espacio generado por G.

Resultado: a) $k=-1$; b) sí: $\vec{w}=-\frac{11}{2}(1,0,-1)+\frac{3}{2}(3,2,-5)$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 91.

Ejercicio propuesto 2.6.2

Adaptado de: 1er parcial 2026-1, problema 3.

Dado el conjunto $A=\{x^2+x+3,\ x^2+2x+7,\ -x^2+1,\ 2x^2+x+2\}$, determine: a) una base y la dimensión del espacio vectorial real W generado por A; b) el espacio W.

Resultado: a) base $\{x^2-1,\ x+4\}$, $\dim W=2$; b) $W=\{ax^2+bx+c\mid c=4b-a\}$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 91.

Ejercicio propuesto 2.6.3

Adaptado de: 1er parcial 2026-1, problema 4.

Sean $A=\{\hat{\imath},\hat{\jmath},\hat{k}\}$ y $B=\{\vec{b}_1,\vec{b}_2,\vec{b}_3\}$ dos bases de $\mathbb{R}^3$. Determine los vectores de la base B si la matriz de transición de la base A a la base B es

$$M_B^A=\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

Resultado: $\vec{b}_1=(1,0,0)$, $\vec{b}_2=(1,1,0)$, $\vec{b}_3=(1,1,1)$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 92.

Ejercicio propuesto 2.6.4

Adaptado de: 1er parcial 2026-1, problema 5.

Determine si el conjunto $A=\{5\tan^2 x,\ -2\sec^2 x,\ -1\}$ es linealmente dependiente o independiente en el intervalo $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$.

Resultado: dependiente: $2(5\tan^2 x)+5(-2\sec^2 x)-10(-1)=0$ para toda x.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 92.

Ejercicio propuesto 2.6.5

Adaptado de: 1er final 2024-1, problema 2.

Sean $A=\{x+3,\ 2x-1\}$ y $B=\{8x+3,\ 5x+1\}$ dos bases del espacio vectorial de los polinomios de grado menor o igual a uno con coeficientes reales. Determine: a) la matriz de transición de la base B a la base A; b) las coordenadas de $3x+2$ en la base A, si $(3x+2)_B=(1,-1)^T$.

Obtenga la regla de correspondencia de $S+T$.

Resolución.

1. $M_B^A(S+T) = M_B^A(S) + M_B^A(T) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.
2. Las columnas, leídas en la base $B = \{1, x, x^2\}$, son las imágenes de los vectores de A:

$$(S+T)(1,1,0) = 1 - x, \qquad (S+T)(0,1,0) = x + x^2, \qquad (S+T)(0,0,1) = 1.$$

3. Coordenadas de un vector genérico en A: $(a,b,c) = a(1,1,0) + (b-a)(0,1,0) + c(0,0,1)$.
4. Por linealidad:

$$(S+T)(a,b,c) = a(1-x) + (b-a)(x+x^2) + c = (b-a)x^2 + (b-2a)x + (a+c).$$

5. Comprobación: $(S+T)(1,1,0) = 0 \cdot x^2 - x + 1 = 1 - x$.
6. **Resultado:** $(S+T)(a,b,c) = (b-a)x^2 + (b-2a)x + (a+c)$.

Ejercicio 3A.5.4 · ¿Es biyectiva? Inversa de polinomios a matrices

Adaptado de: 2º final 2014-2, tipo A, problema 3.

Sean los espacios vectoriales reales $P = \{ax + b \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ y $M = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \middle| \, a, b \in \mathbb{R} \right\}$, y la transformación lineal $F: P \to M$ con regla

$$F(ax+b) = \begin{pmatrix} a-b & a+b \\ a+b & a-b \end{pmatrix}.$$

a) Determine si F es biyectiva. b) Si existe, obtenga la inversa de F.

Resolución.

1. $\dim P = 2$ y $\dim M = 2$ (base $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$).
2. a) Núcleo: $a - b = 0$ y $a + b = 0$ dan $a = b = 0$. $N(F) = \{0\}$: F es inyectiva y, como las dimensiones son iguales, también suprayectiva. F **es biyectiva**.
3. b) Se plantea $F(ax+b) = \begin{pmatrix} p & q \\ q & p \end{pmatrix}$: $a - b = p$ y $a + b = q$. Sumando y restando, $a = \frac{p+q}{2}$ y $b = \frac{q-p}{2}$.
4. Comprobación: $F\left(\frac{p+q}{2}x + \frac{q-p}{2}\right)$ tiene $a - b = p$ y $a + b = q$.
5. **Resultado:** F es biyectiva y $F^{-1}\begin{pmatrix} p & q \\ q & p \end{pmatrix} = \dfrac{p+q}{2}\,x + \dfrac{q-p}{2}$.

Ejercicio 3A.5.5 · Núcleo de dimensión 1 con parámetro; recorrido

Adaptado de: 1er final 2015-1, tipo C, problema 3.

Sea el operador lineal $F: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ cuya matriz asociada a la base canónica es

$$M = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & k \\ 2 & 1 & 3k \end{pmatrix}.$$

3. En base y dimensión, la matriz con los vectores como renglones, el escalonamiento y la lectura: base, dimensión y ecuación del generado.
4. En transición, cada vector escrito como combinación de la otra base, las columnas de M_B^A y una comprobación con un vector.
5. El resultado con los objetos originales: polinomios, matrices o funciones, no solo coordenadas.

Si no se llega al final, el sistema bien planteado (la combinación lineal igualada componente por componente) ya vale buena parte del problema.

- b) la transformación inversa de F.

Datos. Operador de $\mathbb{R}^2$; se usa la base canónica en el dominio y en el codominio.
Planteamiento. Columnas de M = imágenes de $(1,0)$ y $(0,1)$; si $\det M \neq 0$, F es biyectiva y $M(F^{-1}) = M^{-1}$.
Resolución.

1. a) $F(1,0) = (1,-2)$ y $F(0,1) = (-1,1)$:
$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$
2. b) $\det M = 1 - 2 = -1 \neq 0$: F es biyectiva. Con la fórmula de la inversa de 2×2:
$$M^{-1} = \frac{1}{-1}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}.$$
3. $F^{-1}(a,b) = M^{-1}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = (-a-b,\ -2a-b)$.
4. Comprobación: $F(-a-b,\ -2a-b) = \big((-a-b)-(-2a-b),\ (-2a-b)-2(-a-b)\big) = (a,\ b)$.
5. **Resultado:** $M = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ y $F^{-1}(a,b) = (-a-b,\ -2a-b)$.

3A.5 Ejercicios de examen (resueltos)

Ejercicio 3A.5.1 · Dimensión del recorrido con parámetro; núcleo e inversa

Adaptado de: 1er final 2010-2, tipo C, problema 4.

Sean los espacios vectoriales reales $M = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \middle| \, a,b,c \in \mathbb{R} \right\}$ y $P_2 = \{ax^2 + bx + c \mid a,b,c \in \mathbb{R}\}$, y la transformación lineal $F:\ M \to P_2$ con regla

$$F\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} = (-a - 7b - kc)x^2 + (3a + b - 2c)x + (a + 2b + c).$$

La dimensión del recorrido de F es igual a dos. Determine: a) el valor de $k \in \mathbb{R}$; b) una base del recorrido de F; c) el núcleo de F; d) si existe, la transformación inversa de F.
Resolución.

1. Con las bases $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ y $\{x^2, x, 1\}$, cada columna tiene los coeficientes de a, b y c:
$$M_F = \begin{pmatrix} -1 & -7 & -k \\ 3 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$
2. a) $\dim F(M) = \text{rango}\, M_F = 2 < 3$, así que $\det M_F = 0$. Por el primer renglón:
$$\det M_F = -1(1+4) + 7(3+2) - k(6-1) = 30 - 5k = 0 \quad \Rightarrow \quad k = 6.$$

tienen inversa, y para eso hace falta $\dim V = \dim W$. Cuando las dimensiones son iguales, basta comprobar una de las dos condiciones.

Matriz asociada. Sean $A = \{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\}$ una base de V y B una base de W. La matriz $M_B^A(T)$ tiene como columna j el vector de coordenadas de $T(\vec{v}_j)$ en la base B:

$$M_B^A(T) = \Big[\, (T(\vec{v}_1))_B \ \ (T(\vec{v}_2))_B \ \ \cdots \ \ (T(\vec{v}_n))_B \,\Big], \qquad (T(\vec{v}))_B = M_B^A(T)\,(\vec{v})_A.$$

Con las bases canónicas, la columna j es la imagen del j-ésimo vector canónico: en $T(x,y,z) = (\dots)$, los coeficientes de x forman la primera columna.

Álgebra de transformaciones. Con $S, T:\ V \to W$ y $R:\ W \to U$ lineales:

$$(S+T)(\vec{v}) = S(\vec{v}) + T(\vec{v}), \qquad (\alpha T)(\vec{v}) = \alpha\, T(\vec{v}), \qquad (R \circ T)(\vec{v}) = R\big(T(\vec{v})\big).$$

Las tres son lineales. En matrices (con las mismas bases): $M(S+T) = M(S) + M(T)$, $M(\alpha T) = \alpha M(T)$ y $M(R \circ T) = M(R)\,M(T)$, en ese orden: primero actúa T, que va a la derecha.

Inversa. Si T es biyectiva, $T^{-1}:\ W \to V$ es lineal, $T^{-1} \circ T = I_V$ y

$$M_A^B(T^{-1}) = \big[M_B^A(T)\big]^{-1}.$$

T tiene inversa si y solo si su matriz asociada es cuadrada y su determinante es distinto de cero.

Efectos geométricos (subtema 3.6). Los operadores de $\mathbb{R}^2$ se pueden ver como deformaciones del plano. Con la matriz en la base canónica:

- *Escalamiento:* $\begin{pmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{pmatrix}$ estira o encoge cada eje.
- *Reflexión:* $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ en el eje x; $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ en la recta $y = x$.
- *Rotación* de un ángulo θ en sentido antihorario: $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$.
- *Deslizamiento* (cizalla) horizontal: $\begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
- *Proyección* sobre el eje x: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$; no es invertible.

La composición de dos efectos tiene como matriz el producto, con el primer efecto a la derecha. El valor absoluto del determinante es el factor por el que cambian las áreas; si es negativo, la figura se invierte. Este subtema no ha salido en ningún examen de los dos planes.

3A.2 Cómo reconocer el problema

2.3.7 Dependencia lineal de funciones

1. Simplifica cada función: $\tan 0 = 0$, $\cos(x+\pi) = -\cos x$, $\sec^2 x - \tan^2 x = 1$. Si una es la función cero o es múltiplo de otra, el conjunto es dependiente.
2. Si no hay identidad a la vista, plantea $\alpha_1 f_1(x) + \cdots + \alpha_n f_n(x) = 0$ **para toda** x del intervalo y evalúa en n valores sencillos (0, $\frac{\pi}{2}$, 1…). Si el sistema solo admite la solución cero, el conjunto es independiente.
3. Para la dependencia no basta evaluar: hay que exhibir la combinación no trivial válida para todo x.

SOLO PLAN 2010 **Criterio del wronskiano.** El programa del Plan 2010 lo menciona por nombre. Para n funciones derivables $n-1$ veces,

$$W(x) = \det \begin{pmatrix} f_1 & \cdots & f_n \\ f_1' & \cdots & f_n' \\ \vdots & & \vdots \\ f_1^{(n-1)} & \cdots & f_n^{(n-1)} \end{pmatrix}.$$

Si $W(x_0) \neq 0$ para algún x_0, las funciones son linealmente independientes. Si $W \equiv 0$, el criterio no decide por sí solo; en los ejemplos de examen, buscar la identidad es más rápido. Por ejemplo, para $\{e^x, xe^x\}$: $W = e^x(e^x + xe^x) - xe^x \cdot e^x = e^{2x} \neq 0$, así que son independientes.

2.4 Ejemplo resuelto

Adaptado de: 2º final 2014-2, tipo A, problema 1.

Sea el conjunto $A = \{(2,-2,-4), (-1,2,3), (3,-2,-5), (1,0,-1)\}$. Determine:

- a) el espacio W generado por A;
- b) una base y la dimensión de W;
- c) si el vector $\vec{v} = (3,2,1)$ pertenece a W.

Datos. Cuatro vectores de $\mathbb{R}^3$: al menos uno sobra.

Planteamiento. Los vectores como renglones; escalonar. Los renglones no nulos dan la base, y un renglón genérico da la ecuación de W.

Resolución.

1. Se ordena con $(1,0,-1)$ primero y se escalona:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & -4 \\ -1 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & -5 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_4-3R_1]{\substack{R_2-2R_1 \\ R_3+R_1}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[-\frac{1}{2}R_2]{\substack{R_3+R_2 \\ R_4-R_2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

2. b) Quedan dos renglones no nulos: una base de W es $\{(1,0,-1), (0,1,1)\}$ y $\dim W = 2$. El conjunto A es linealmente dependiente.

Comprobaciones rápidas. Para una matriz de $n \times n$ con valores propios $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ (repetidos según su multiplicidad algebraica):

$$\lambda_1 + \cdots + \lambda_n = \operatorname{tr} M, \qquad \lambda_1 \cdots \lambda_n = \det M.$$

En una matriz triangular, los valores propios son los elementos de la diagonal. Si λ es valor propio de M, entonces λ^k lo es de M^k y, si M es invertible, $1/\lambda$ lo es de M^{-1}, con los mismos vectores propios.

Matrices similares. A y B son *similares* si existe una matriz invertible P tal que $B = P^{-1}AP$. Las matrices asociadas a un mismo operador en dos bases son similares, y P es la matriz de transición entre esas bases. Las matrices similares tienen el mismo polinomio característico, los mismos valores propios, el mismo determinante, la misma traza y el mismo rango.

Diagonalización. Un operador $T: V \to V$, con $\dim V = n$, es *diagonalizable* si existe una base de V formada por vectores propios de T. En esa base, la matriz asociada es diagonal y tiene los valores propios en la diagonal:

$$D = P^{-1}MP, \qquad P = \begin{bmatrix} \vec{v}_1 & \vec{v}_2 & \cdots & \vec{v}_n \end{bmatrix},$$

donde las columnas de P (la *matriz diagonalizadora*) son los vectores propios, en el mismo orden que los valores propios de D. Criterios:

- Si los n valores propios son distintos, T es diagonalizable.
- Si hay valores repetidos, T es diagonalizable si y solo si, para cada valor propio, la multiplicidad geométrica es igual a la algebraica; es decir, si las dimensiones de los espacios característicos suman n.
- En el campo de los reales, si $p(\lambda)$ tiene raíces complejas, T no es diagonalizable sobre $\mathbb{R}$.

Operadores en espacios de polinomios o de matrices. Se trabaja con la matriz asociada en una base sencilla ($\{x^2, x, 1\}$, o la base canónica de $M_{2\times 2}$). Los vectores propios que salen como columnas de coordenadas se traducen de regreso: la columna $(1,-1,0)$ en la base $\{x^2, x, 1\}$ es el polinomio $x^2 - x$.

3B.2 Cómo reconocer el problema

Si el enunciado dice…	Se pide…	Procedimiento
«valores propios», «valores característicos», «polinomio característico»	raíces de $\det(M - \lambda I)$	3B.3.1
«vectores propios», «espacios característicos», «base de cada espacio característico»	$N(M - \lambda I)$ para cada λ	3B.3.2
«¿es diagonalizable?», «determinar k para que sea diagonalizable»	comparar multiplicidades	3B.3.3

1. **Vector cero:** $(a,b)+(0,0)=(a,b)$. Se cumple, con $\vec{0}=(0,0)$.
2. **Inversos:** $(a,b)+(-a,-b)=(0,0)$, y $-a,-b\in\mathbb{Q}$. Se cumple.
3. **Cerradura de la multiplicación:** con $k=\frac{1}{2}$ y $(2,1)$: $\frac{1}{2}(2,1)=(\sqrt{2},1)\notin V$, porque $\sqrt{2}$ no es racional. No se cumple.
4. $\alpha(\vec{u}+\vec{v})=\alpha\vec{u}+\alpha\vec{v}$**:** con $\alpha=2$, $\vec{u}=\vec{v}=(1,1)$: $2(2,2)=(4,4)$, pero $2(1,1)+2(1,1)=(1,1)+(1,1)=(2,2)$. No se cumple.
5. $(\alpha+\beta)\vec{u}=\alpha\vec{u}+\beta\vec{u}$**:** con $\alpha=\beta=1$, $\vec{u}=(1,1)$: $2(1,1)=(1,1)$, pero $1(1,1)+1(1,1)=(2,2)$. No se cumple.
6. **Resultado:** V **no** es un espacio vectorial sobre $\mathbb{Q}$. No se satisfacen la cerradura de la multiplicación por un escalar y las dos leyes distributivas. Por eso no tiene sentido calcular $\vec{m}$ (además, $\frac{1}{2}(3,5)=(\sqrt{3},\sqrt{5})$ no está en V).

Ejercicio 2.5.3 · Valores desconocidos a partir del espacio renglón

Adaptado de: 1er final 2014-1, tipo B, problema 2.

El espacio renglón de la matriz

$$N=\begin{pmatrix}3 & a & 2\\ 3 & b & 5\\ 5 & c & 3\end{pmatrix}\quad\text{es}\quad L(N_r)=\{(m,\,n,\,m+n)\mid m,n\in\mathbb{R}\}.$$

- a) Determine los valores de a, b y c.
- b) Con esos valores, determine el espacio columna de N.
- c) Obtenga el rango de N.

Resolución.

1. a) Cada renglón está en el espacio renglón, así que su tercera componente es la suma de las dos primeras: $2=3+a$, $5=3+b$, $3=5+c$. Entonces $a=-1$, $b=2$, $c=-2$.
2. c) El espacio renglón $\{(m,n,m+n)\}$ tiene dimensión 2 (parámetros m y n), así que $\operatorname{rango} N=2$. Comprobación: $(3,-1,2)$ y $(3,2,5)$ son independientes y $(5,-2,3)=\frac{16}{9}(3,-1,2)-\frac{1}{9}(3,2,5)$.
3. b) Las columnas de N son $(3,3,5)$, $(-1,2,-2)$ y $(2,5,3)$. Las dos primeras son independientes y el rango es 2, así que generan el espacio columna. Su ecuación sale de

$$\det\begin{pmatrix}3 & 3 & 5\\ -1 & 2 & -2\\ x & y & z\end{pmatrix}=-16x+y+9z=0,\quad\text{es decir,}\quad 16x-y-9z=0.$$

4. Comprobación: $(2,5,3)$ cumple $32-5-27=0$.
5. **Resultado:** $a=-1$, $b=2$, $c=-2$; espacio columna $\{(x,y,z)\mid 16x-y-9z=0\}=\operatorname{gen}\{(3,3,5),(-1,2,-2)\}$; rango $N=2$.

Ejercicio 2.5.4 · Matriz de transición en un espacio complejo

Adaptado de: 1er final 2014-2, tipo B, problema 1.

Sea el espacio vectorial complejo $\mathbb{C}^2$ con las operaciones usuales, y sean $A=\{(1,i),(i,0)\}$ y $B=\{(2,i),(0,-i)\}$ dos bases de $\mathbb{C}^2$. Obtenga:

3A.9 Procedimiento recomendado en el examen

1. Las dimensiones del dominio y del codominio, escritas al principio.
2. Las bases que se usan y la matriz asociada, con la regla «columna = imagen».
3. El sistema del núcleo y su solución con parámetros; la base del núcleo.
4. El recorrido con su base o su ecuación, y el teorema de la dimensión como comprobación.
5. Para la inversa: la razón por la que existe (o no), la matriz inversa o el sistema despejado, y la regla de T^{-1}.
6. Una comprobación con los datos del enunciado.

Si no sale la regla, el planteamiento por linealidad ($T(\alpha\vec{v}_1+\beta\vec{v}_2)=\alpha T(\vec{v}_1)+\beta T(\vec{v}_2)$) y el sistema para α y β ya valen buena parte del problema.

Ejercicio 2.5.6 · Dimensión de un generado de matrices con parámetro

Adaptado de: 1er final 2025-1, problema 2.

Sea W el subespacio generado por las matrices

$$\left\{\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2 & 1\\ 3 & -1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}5 & 4\\ 10 & a\end{pmatrix}\right\}.$$

Determine: a) el valor de $a \in \mathbb{R}$ para que la dimensión de W sea dos; b) una base de W con ese valor.

Resolución.

1. Cada matriz $\begin{pmatrix}p & q\\ r & s\end{pmatrix}$ se escribe como el renglón (p, q, r, s):

$$\begin{bmatrix}1 & -1 & -1 & 0\\ 2 & 1 & 3 & -1\\ 5 & 4 & 10 & a\end{bmatrix} \xrightarrow[R_3-5R_1]{R_2-2R_1} \begin{bmatrix}1 & -1 & -1 & 0\\ 0 & 3 & 5 & -1\\ 0 & 9 & 15 & a\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_3-3R_2} \begin{bmatrix}1 & -1 & -1 & 0\\ 0 & 3 & 5 & -1\\ 0 & 0 & 0 & a+3\end{bmatrix}$$

2. a) La dimensión es 2 si el tercer renglón se anula: $a + 3 = 0$, es decir, $a = -3$. Con cualquier otro valor, la dimensión es 3.
3. b) Con $a = -3$, las dos primeras matrices son independientes (no son múltiplos) y la tercera es combinación de ellas: $\begin{pmatrix}5 & 4\\ 10 & -3\end{pmatrix} = -\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 0\end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix}2 & 1\\ 3 & -1\end{pmatrix}$.
4. **Resultado:** $a = -3$; una base de W es $\left\{\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2 & 1\\ 3 & -1\end{pmatrix}\right\}$.

Ejercicio 2.5.7 · Dependencia lineal de funciones

Adaptado de: 2º final 2024-1, problema 2.

Determine si el conjunto $D = \{\operatorname{sen} x,\ \cos(x+\pi),\ \tan 0\}$ es linealmente dependiente o independiente.

Resolución.

1. Se simplifica cada elemento: $\cos(x+\pi) = -\cos x$ y $\tan 0 = 0$. El tercer elemento es la función cero.
2. Un conjunto que contiene al cero es dependiente: $0 \cdot \operatorname{sen} x + 0 \cdot \cos(x+\pi) + 1 \cdot \tan 0 = 0$ para toda x, con un coeficiente distinto de cero.
3. (Si se quitara el cero, $\{\operatorname{sen} x, -\cos x\}$ sí sería independiente: $\alpha \operatorname{sen} x - \beta \cos x = 0$ en $x = 0$ da $\beta = 0$ y en $x = \frac{\pi}{2}$ da $\alpha = 0$.)
4. **Resultado:** D es **linealmente dependiente**, porque contiene a la función cero.

Ejercicio propuesto 3A.6.2

Adaptado de: 1er final 2015-1, tipo C, problema 4.

Sean los espacios vectoriales reales $P = \{ax + b \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ y $M = \left\{\begin{pmatrix}a & b\\ 0 & -a\end{pmatrix} \middle| a, b \in \mathbb{R}\right\}$, y la transformación lineal $T:\ P \to M$ tal que

$$T(x+1) = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}, \qquad T(2x-1) = \begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Obtenga la inversa de T.

Resultado: $T^{-1}\begin{pmatrix}a & b\\ 0 & -a\end{pmatrix} = (a+2b)x + (a-b)$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 93.

Ejercicio propuesto 3A.6.3

Adaptado de: 2º extraordinario 2023-2, problema 3.

Sean los espacios vectoriales $\mathbb{R}^3$ y $P_2 = \{ax^2 + bx + c \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}$, y la transformación lineal $T:\ \mathbb{R}^3 \to P_2$ tal que $T(1,0,0) = x^2 + x + 1$, $T(1,1,0) = x^2 + 1$ y $T(1,1,1) = x^2$. Obtenga, si existe, la regla de correspondencia de $T^{-1}:\ P_2 \to \mathbb{R}^3$.

Resultado: $T^{-1}(ax^2 + bx + c) = (a,\ a-b,\ a-c)$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 93.

Ejercicio propuesto 3A.6.4

Adaptado de: 3er extraordinario 2026-1, problema 3.

Considere el espacio vectorial M_2 de las matrices reales de 2×2 y la transformación $T:\ M_2 \to M_2$ dada por $T(A) = A - A^T$, donde A^T es la transpuesta de A. Determine si T es una transformación lineal.

Resultado: sí es lineal.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 93.

Ejercicio propuesto 3A.6.5

Adaptado de: 2º parcial 2024-2, tipo B, problema 4.

Sean los espacios vectoriales $P_2 = \{ax^2 + bx + c \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}$ y $W = \left\{\begin{pmatrix}a & b\\ b & c\end{pmatrix} \middle| a, b, c \in \mathbb{R}\right\}$, y la transformación lineal $T:\ P_2 \to W$ con regla

$$T(ax^2 + bx + c) = \begin{pmatrix}a-c & b\\ b & a+c\end{pmatrix}.$$

Con las bases $A = \{x^2, x, 1\}$ de P_2 y $B = \left\{\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right\}$ de W, determine: a) la matriz $M_B^A(T)$; b) la regla de correspondencia de T^{-1}.

Resultado: a) $M_A^B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$; b) $(3x+2)_A = (1,1)^T$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 92.

Ejercicio propuesto 2.6.6

Adaptado de: 2º final 2024-1, problema 1.

Determine si el conjunto $A = \{(x,y) \mid y - |x| = 0;\ x, y \in \mathbb{R}\}$ es un subespacio de $\mathbb{R}^2$.

Resultado: no es subespacio: $(1,1) \in A$, pero $-1 \cdot (1,1) = (-1,-1) \notin A$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 92.

2.7 Errores frecuentes

1. **Suponer que el cero es** $(0,0)$ con operaciones no usuales. Se despeja de $\vec{u} + \vec{0} = \vec{u}$ con la suma dada.
2. **Demostrar un axioma con un ejemplo.** Un ejemplo solo sirve para mostrar que *no* se cumple; para afirmar que se cumple hay que usar elementos genéricos.
3. **Olvidar la condición del cero en un subespacio.** $\{p \mid p(0) = 3\}$ falla de inmediato porque el polinomio cero no cumple $p(0) = 3$.
4. **Confundir el sentido de la matriz de transición.** M_B^A lleva coordenadas en A a coordenadas en B; sus columnas son los vectores de A escritos en B, no al revés.
5. **Poner las coordenadas como renglones** de M_B^A. Van en columnas.
6. **Leer la base del espacio columna en la escalonada.** Las columnas de la forma escalonada no generan el espacio columna original; se toman las columnas originales que tienen pivote, o se escalona N^T.
7. **Dar la dimensión de P_2 como 2.** Es 3: $\{x^2, x, 1\}$.
8. **Usar escalares reales en un espacio complejo.** En $\mathbb{C}^2$ sobre $\mathbb{C}$, los coeficientes de las combinaciones pueden ser complejos.
9. **Concluir dependencia de funciones con unos cuantos valores de x.** Evaluar sirve para probar independencia; la dependencia exige una identidad válida para toda x.

2.8 Formulario de emergencia de la unidad

- Subespacio: $\vec{0} \in W$, $\vec{u} + \vec{v} \in W$, $\alpha\vec{u} \in W$
- $\dim \mathbb{R}^n = n \cdot \dim P_n = n+1 \cdot \dim M_{m\times n} = mn \cdot \dim \mathbb{C}$ sobre $\mathbb{R} = 2$
- n vectores de $\mathbb{R}^n$ son base $\iff \det \neq 0$
- Vectores como renglones → escalonar → renglones no nulos = base del generado
- $(\vec{v})_B = M_B^A(\vec{v})_A \cdot (M_B^A)^{-1} = M_A^B \cdot M_C^A = M_C^B M_B^A \cdot M_B^A = \mathbf{B^{-1}A}$
- rango N = dim espacio renglón = dim espacio columna
- Wronskiano (SOLO PLAN 2010): $W(x_0) \neq 0 \Rightarrow$ independientes
- $\sec^2 x - \tan^2 x = 1 \cdot \operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1 \cdot \cos(x+\pi) = -\cos x$

2.9 Procedimiento recomendado en el examen

1. El espacio y las operaciones escritos explícitamente, y el campo de los escalares.
2. En «¿es subespacio / espacio vectorial?», cada condición o axioma con «se cumple» o «no se cumple» y su justificación o contraejemplo.

La dimensión del núcleo de F es igual a 1. Determine: a) el valor de k; b) el recorrido de F.

Resolución.

1. a) $\dim N(F) = 1$ implica rango $M = 2$, así que $\det M = 0$. Por la primera columna:
$$\det M = 2(3k-k) + 2(-k-1) = 4k - 2k - 2 = 2k - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad k = 1.$$
2. b) Con $k = 1$, el recorrido es el espacio generado por las columnas $(2,0,2)$, $(-1,1,1)$ y $(1,1,3)$. Las dos primeras no son paralelas, y la tercera es su suma: $(2,0,2)+(-1,1,1) = (1,1,3)$. Entonces $\dim F(\mathbb{R}^3) = 2$.
3. La ecuación del plano sale del vector normal $(2,0,2) \times (-1,1,1) = (-2,-4,2)$, proporcional a $(1,2,-1)$:
$$F(\mathbb{R}^3) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y - z = 0\}.$$
4. Comprobación: $(1,1,3)$ cumple $1+2-3=0$. El núcleo, $\operatorname{gen}\{(1,1,-1)\}$, tiene dimensión $1 = 3-2$.
5. **Resultado:** $k = 1$ y $F(\mathbb{R}^3) = \{(x,y,z) \mid z = x + 2y\}$.

Ejercicio 3A.5.6 · ¿Es lineal un operador con derivadas?

Adaptado de: 2º extraordinario 2024-2, problema 3.

Sea V el espacio vectorial de los polinomios de grado menor o igual a n con coeficientes reales y sea $T:\ V \to V$ con regla $T\big(p(x)\big) = 2p''(x) - 3p'(x)$. Determine si T es lineal.

Resolución.

1. T va de V a V: al derivar, el grado no aumenta.
2. **Superposición.** Con $p, q \in V$, la derivada de una suma es la suma de las derivadas:
$$T(p+q) = 2(p+q)'' - 3(p+q)' = \big(2p'' - 3p'\big) + \big(2q'' - 3q'\big) = T(p) + T(q).$$
Se cumple.
3. **Homogeneidad.** Con $\alpha \in \mathbb{R}$, $(\alpha p)' = \alpha p'$:
$$T(\alpha p) = 2\alpha p'' - 3\alpha p' = \alpha\big(2p'' - 3p'\big) = \alpha\, T(p).$$
Se cumple.
4. **Resultado:** T es lineal. (Por ejemplo, $T(x^2) = 4 - 6x$ y $T(2x^2) = 8 - 12x = 2T(x^2)$.)

Ejercicio 3A.5.7 · Núcleo, dimensión del recorrido e inversa entre espacios de matrices

Adaptado de: 1er final 2024-1, problema 3.

Sean los espacios vectoriales $M = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| \, a,b,c,d \in \mathbb{R} \right\}$ y $N = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ y & z \end{pmatrix} \middle| \, x,y,z \in \mathbb{R} \right\}$, y la transformación lineal $T:\ M \to N$ definida por

$$T\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-b & d-c \\ d-c & 2a+b+c \end{pmatrix}.$$

Determine: a) el núcleo de T; b) la dimensión del recorrido de T; c) si existe, la regla de correspondencia de T^{-1}.

Resolución.

Unidad 3 · Parte A · Transformaciones lineales: núcleo, recorrido, matriz asociada e inversa

Objetivo (programa de la asignatura). El alumno aplicará el concepto de transformación lineal y sus propiedades en la resolución de problemas que los involucren. (El Plan 2016 dice lo mismo.)

Instrucciones de emergencia

- **Frecuencia:** sin contar los valores propios (Parte B), hay un problema de transformaciones en los 8 finales del Plan 2010 y en 27 de los 29 finales y extraordinarios del Plan 2016. Los segundos parciales del Plan 2016 son, completos, de esta unidad.
- **Tiempo:** de 3 a 4 horas para esta parte.
- **Ruta corta:**
  1. Lee la sección 3A.1 (20 min).
  2. Sigue el ejemplo 3A.4 tapando la resolución.
  3. Resuelve los ejercicios 3A.5 con cronómetro (15 min cada uno).

3A.1 Conceptos y expresiones

Transformación. Una *transformación* $T: V \to W$ asigna a cada vector de V (el *dominio*) un único vector de W (el *codominio*). Se da con su *regla de correspondencia*, por ejemplo $T(x,y) = (x-y,\ 2x)$ o $T(ax+b) = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$.

Transformación lineal. T es *lineal* si, para todos $\vec{u}, \vec{v} \in V$ y todo escalar α,

$$T(\vec{u}+\vec{v}) = T(\vec{u}) + T(\vec{v}) \qquad \text{y} \qquad T(\alpha\vec{u}) = \alpha\, T(\vec{u}).$$

Consecuencias: $T(\vec{0}_V) = \vec{0}_W$, y T queda determinada por las imágenes de los vectores de una base: si $\vec{v} = \alpha_1\vec{v}_1 + \cdots + \alpha_n\vec{v}_n$, entonces $T(\vec{v}) = \alpha_1 T(\vec{v}_1) + \cdots + \alpha_n T(\vec{v}_n)$. Una regla con términos constantes ($x+1$), productos de variables (xy), potencias (x^2), valores absolutos o funciones como $\operatorname{sen} x$ no es lineal. Derivar, integrar, transponer y multiplicar por una matriz fija sí lo son.

Núcleo y recorrido.

$$N(T) = \{\vec{v} \in V \mid T(\vec{v}) = \vec{0}_W\}, \qquad T(V) = \{T(\vec{v}) \mid \vec{v} \in V\}.$$

El núcleo es un subespacio de V y el recorrido es un subespacio de W. El recorrido está generado por las imágenes de cualquier base de V.

Teorema de la dimensión. Si $\dim V = n$ es finita,

$$\dim V = \dim N(T) + \dim T(V).$$

$\dim T(V)$ es el rango de cualquier matriz asociada a T. La dimensión del núcleo se llama a veces *nulidad*.

Inyectiva, suprayectiva, biyectiva. T es *inyectiva* si y solo si $N(T) = \{\vec{0}\}$; *suprayectiva* si $T(V) = W$, es decir, si $\dim T(V) = \dim W$; *biyectiva* si es las dos cosas. Solo las biyectivas

3. b) Un polinomio $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$ está en el recorrido si el sistema $M_F(a,b,c)^T = (\alpha,\beta,\gamma)^T$ es compatible. Escalonando con $k=6$ se llega a la condición $\alpha - \beta + 4\gamma = 0$, es decir, $\beta = \alpha + 4\gamma$:
$$\alpha x^2 + (\alpha+4\gamma)x + \gamma = \alpha(x^2+x) + \gamma(4x+1).$$
Base del recorrido: $\{x^2+x,\ 4x+1\}$. Comprobación: las dos primeras columnas, $-x^2+3x+1$ y $-7x^2+x+2$, cumplen $-1-3+4=0$ y $-7-1+8=0$.
4. c) Núcleo: $-a-7b-6c=0$, $3a+b-2c=0$, $a+2b+c=0$. De las dos últimas, $a=c$ y $b=-c$ (la primera se cumple: $-c+7c-6c=0$):
$$N(F) = \left\{ \alpha \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \,\middle|\, \alpha \in \mathbb{R} \right\}.$$
Teorema de la dimensión: $1+2=3=\dim M$.
5. d) $N(F) \neq \{\vec{0}\}$: F no es inyectiva y **no tiene inversa**.
6. **Resultado:** $k=6$; base del recorrido $\{x^2+x,\ 4x+1\}$; núcleo generado por $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; no existe F^{-1}.

Ejercicio 3A.5.2 · Regla de correspondencia a partir de datos mezclados

Adaptado de: 2º final 2010-2, tipo A, problema 3.

Sean el espacio vectorial real $P_1 = \{ax+b \mid a,b \in \mathbb{R}\}$ y la transformación lineal $F: P_1 \to \mathbb{R}^2$ tal que $F(2x-1) = (4,-1)$ y $F(1) = (-1,1) - F(x)$. Determine: a) la regla de correspondencia de F; b) la dimensión del núcleo de F; c) el recorrido de F.

Resolución.

1. Por linealidad, $F(2x-1) = 2F(x) - F(1)$, y el segundo dato es $F(x) + F(1) = (-1,1)$. Se suman las dos ecuaciones:
$$3F(x) = (4,-1) + (-1,1) = (3,0) \quad \Rightarrow \quad F(x) = (1,0),$$
y entonces $F(1) = (-1,1) - (1,0) = (-2,1)$.
2. a) $F(ax+b) = aF(x) + bF(1) = a(1,0) + b(-2,1) = (a-2b,\ b)$.
3. Comprobación: $F(2x-1) = (2+2,\ -1) = (4,-1)$.
4. b) $F(ax+b) = (0,0)$ da $b=0$ y $a=0$: $N(F) = \{0\}$ y $\dim N(F) = 0$.
5. c) Por el teorema de la dimensión, $\dim F(P_1) = 2 - 0 = 2 = \dim \mathbb{R}^2$.
6. **Resultado:** $F(ax+b) = (a-2b,\ b)$; $\dim N(F) = 0$; el recorrido es todo $\mathbb{R}^2$.

Ejercicio 3A.5.3 · Regla de la suma a partir de sus matrices asociadas

Adaptado de: 1er final 2014-1, tipo B, problema 3.

Sean el espacio vectorial real $P_2 = \{ax^2+bx+c \mid a,b,c \in \mathbb{R}\}$ y las transformaciones lineales $T: \mathbb{R}^3 \to P_2$ y $S: \mathbb{R}^3 \to P_2$ cuyas matrices asociadas respecto a las bases $A = \{(1,1,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ y $B = \{1, x, x^2\}$ son

$$M_B^A(T) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \qquad M_B^A(S) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Si el enunciado dice…	Se pide…	Procedimiento
«determinar si T es lineal»	las dos condiciones, o un contraejemplo	3A.3.1
«$T(1,2) = \ldots$, $T(2,1) = \ldots$», «tal que» con imágenes de vectores	la regla de correspondencia	3A.3.2
«núcleo», «recorrido», «dimensión del recorrido», «una base del recorrido», «¿pertenece al recorrido?»	sistemas homogéneos y espacio columna	3A.3.3
«la dimensión del núcleo es 1», «la dimensión del recorrido es 2», con un parámetro k	el rango fija k	3A.3.3
«matriz asociada respecto a las bases A y B», «$M_B^A(T)$»	columnas = coordenadas de las imágenes	3A.3.4
«$S+T$», «$T \circ S$», «$2T \circ T - T + 3I$», «T tal que $U \circ T - V = W$»	álgebra de transformaciones	3A.3.5
«¿es biyectiva?», «si existe, la inversa», «T^{-1}»	núcleo y matriz inversa	3A.3.6

3A.3 Procedimientos

3A.3.1 ¿Es lineal?

1. Busca primero un contraejemplo rápido: si $T(\vec{0}) \neq \vec{0}$, no es lineal. Si la regla tiene productos o potencias de las variables, prueba $T(2\vec{v})$ contra $2T(\vec{v})$ con un vector sencillo.
2. Si parece lineal, toma dos vectores genéricos $\vec{u} = (a, b, \ldots)$ y $\vec{v} = (c, d, \ldots)$ (o dos polinomios o matrices genéricos) y un escalar α.
3. **Superposición:** desarrolla $T(\vec{u} + \vec{v})$ y compáralo con $T(\vec{u}) + T(\vec{v})$. Escribe «se cumple» o «no se cumple».
4. **Homogeneidad:** desarrolla $T(\alpha\vec{u})$ y compáralo con $\alpha T(\vec{u})$.
5. Conclusión: lineal si se cumplen las dos.

3A.3.2 Regla de correspondencia a partir de imágenes

1. Comprueba que los vectores dados forman una base del dominio (tantos como la dimensión y linealmente independientes).
2. Escribe un vector genérico como combinación lineal de esa base: $(x, y) = \alpha\vec{v}_1 + \beta\vec{v}_2$. Resuelve el sistema para α y β en términos de x y y.
3. Aplica la linealidad: $T(x, y) = \alpha\, T(\vec{v}_1) + \beta\, T(\vec{v}_2)$, y simplifica.
4. Si los datos vienen mezclados (por ejemplo, $F(1) = -\hat{\imath} + \hat{\jmath} - F(x)$), primero despeja las imágenes de una base sencilla ($F(x)$ y $F(1)$) con un sistema.
5. Comprueba la regla con los datos del enunciado.

3A.3.3 Núcleo, recorrido y teorema de la dimensión

1. **Núcleo:** iguala la regla al vector cero del codominio y resuelve el sistema homogéneo. Escribe $N(T)$ con sus parámetros y da una base.

2. **Recorrido:** las imágenes de una base del dominio lo generan. Escríbelas como vectores de coordenadas, en renglones o en columnas, y escalona para quitar las dependientes. Otra forma: plantea $T(\vec{v}) = \vec{w}$ con $\vec{w}$ genérico y busca la condición de compatibilidad del sistema; esa condición es la ecuación del recorrido.
3. **¿Pertenece $\vec{w}$ al recorrido?** Resuelve $T(\vec{v}) = \vec{w}$: pertenece si el sistema es compatible.
4. **Teorema de la dimensión:** $\dim N(T) + \dim T(V) = \dim V$. Úsalo para comprobar, o para obtener una dimensión a partir de la otra.
5. **Con parámetro k:** el dato «$\dim T(V) = 2$» o «$\dim N(T) = 1$» fija el rango de la matriz asociada. Si la matriz es cuadrada y el rango debe ser menor que n, iguala su determinante a cero; si no, escalona y anula el renglón que depende de k.

3A.3.4 Matriz asociada respecto a bases dadas

1. Aplica T a cada vector de la base del dominio A, en orden.
2. Escribe cada imagen como combinación lineal de la base del codominio B. Con la base canónica, las coordenadas se leen directo; con otra base, resuelve un sistema (si todas las imágenes van a la misma base B, escalona una sola matriz aumentada con todas ellas a la derecha).
3. Esas coordenadas son las columnas de $M_B^A(T)$, en el orden de A.
4. **Regla a partir de la matriz:** escribe un vector genérico en la base A, multiplica por la matriz y traduce el resultado con la base B.

3A.3.5 Suma, múltiplo y composición

1. Con reglas, aplica la definición: $(S \circ T)(\vec{v}) = S\big(T(\vec{v})\big)$: sustituye la regla de T dentro de la de S.
2. Con matrices en las mismas bases, suma o multiplica: $M(S \circ T) = M(S)M(T)$.
3. Para una ecuación como $U \circ T - V = W$, despeja como con números, sin cambiar el orden: $U \circ T = V + W$ y, si U es invertible, $T = U^{-1} \circ (V + W)$. En matrices, $M(T) = M(U)^{-1}\big(M(V) + M(W)\big)$.

3A.3.6 Inversa

1. Compara dimensiones: si $\dim V \neq \dim W$, no hay inversa.
2. Calcula el núcleo: si $N(T) = \{\vec{0}\}$ y las dimensiones son iguales, T es biyectiva.
3. **Inversa por matriz:** $M_A^B(T^{-1}) = [M_B^A(T)]^{-1}$. Multiplica por un vector genérico de coordenadas y tradúcelo al espacio de llegada de T^{-1}.
4. **Inversa por sistema:** plantea $T(\vec{v}) = \vec{w}$ con $\vec{w}$ genérico y despeja $\vec{v}$ en términos de $\vec{w}$.
5. **Inversa por imágenes:** si se conocen $T(\vec{v}_1), \ldots, T(\vec{v}_n)$, entonces $T^{-1}(T(\vec{v}_j)) = \vec{v}_j$; escribe un vector genérico del codominio como combinación de las imágenes.
6. Comprueba con un vector: $T^{-1}(T(\vec{v})) = \vec{v}$.

3A.4 Ejemplo resuelto

> *Adaptado de: 1er final 2015-1, tipo A, problema 3.*
> Sea la transformación lineal $F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $F(a, b) = (a - b,\ b - 2a)$. Determine:
> - a) una matriz asociada a F;